7.5 正态分布

FIG · E3-7-5

01 · 核心定理、公式与阶段边界

核心参数与 3σ 黄金常数：

分布记号：

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(μ 为均值，σ 为标准差)

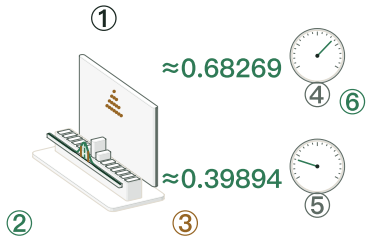
3σ 原则区间概率：

- $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 68.27\% \approx 0.683$
- $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 95.45\% \approx 0.954$
- $P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 99.73\% \approx 0.997$

对称割补口诀：中轴平分各一半（0.5）；双侧对称算单侧，总面积 1 减中间再除以 2！

02 · 动手实验台

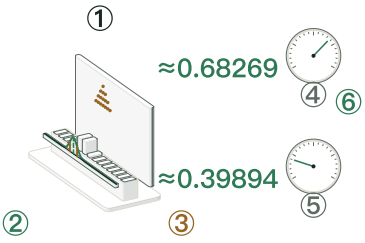
姿态 A · 基准状态



① 高尔顿钉板等距正态落球仪 · N(0, 1²) · μ±σ 黄金法则
② μ=0, σ=1 (峰值 0.40)
③ 闸门 P(-1<X<1) ≈ 0.6827
④ 区间概率 P(a,b) · 量程[0, 1]
⑤ 峰值密度 1/(√2πσ) · 量程[0, 2]
⑥ 面积是概率 · 高度不是

μ 0 · σ 1

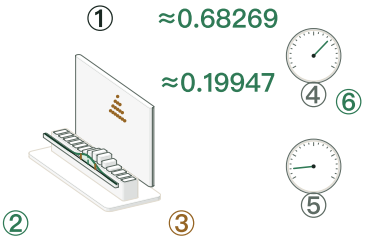
姿态 B · 下界/初始端



① 高尔顿钉板等距正态落球仪 · N(-2, 1²) · μ±σ 黄金法则
② μ=-2, σ=1 (峰值 0.40)
③ 闸门 P(-3<X<-1) ≈ 0.6827
④ 区间概率 P(a,b) · 量程[0, 1]
⑤ 峰值密度 1/(√2πσ) · 量程[0, 2]
⑥ 面积是概率 · 高度不是

μ -2 · σ 1

姿态 C · 上界/满量程端



① 高尔顿钉板等距正态落球仪 · N(2, 2²) · μ±σ 黄金法则
② μ=2, σ=2 (峰值 0.20)
③ 闸门 P(0<X<4) ≈ 0.6827
④ 区间概率 P(a,b) · 量程[0, 1]
⑤ 峰值密度 1/(√2πσ) · 量程[0, 2]
⑥ 面积是概率 · 高度不是

μ 2 · σ 2

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且 $P(X<1)=P(X>5)$。$\mu=$?

☐ A2 ☐ B3 ☐ C4 ☐ D6

2. 某次考试 1000 人参加，题目给出成绩 $X \sim N(100, 10^2)$。120 分以上的大约有多少人?

☐ A23 ☐ B46 ☐ C159 ☐ D1

3. $X \sim N(0, 0.2^2)$，它的曲线在 $x=0$ 处最高，高约 1.99。$P(X=0)$ 是?

☐ A约 1.99 ☐ B0.5 ☐ C0 ☐ D约 0.68

4. 某市居民月收入的直方图：左边一个高峰，右边拖着很长的尾巴。小明说："收入服从正态分布，所以收入低于平均数的人正好占一半。"

☐ A对，有峰的图都是正态

☐ B不对：图明显不对称，正态既不是题设、也没有数据支持，不能套用"各占一半"

☐ C对，只要样本足够多，任何数据都服从正态分布

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。左边 $x<1$ 的尾巴和右边 $x>5$ 的尾巴一样大，说明 1 和 5 关于对称轴 $x=\mu$ 对称，$\mu=\dfrac{1+5}{2}=3$。选 D 是把 $1+5$ 忘了除以 2。

(2) [A]

A。$\sigma=10$，$120=\mu+2\sigma$。$\mu\pm2\sigma$ 外约 $1-0.9545=0.0455$，右边一半约 0.0228，$1000\times0.0228\approx23$。选 B 没除以 2；选 C 用的是 $\mu+\sigma$ 那一行；选 D 用的是 3σ。

(3) [C]

C。概率是面积，不是高度。1.99 比 1 还大，本来就不可能是概率。“$X=0$”只是一个点，没有宽度，面积为 0。

B 是 $P(X\le0)$，D 是 $P(-0.2\le X\le0.2)$，都是一段，不是一个点。

(4) [B]

B。用正态之前先问：是题目给的，还是数据支持的假设？这张图左右不对称，正态的“关于均值对称”不成立。少数很高的收入会把平均数往上拉，低于平均数的人往往超过一半。

C 也错：样本再多，也只是把原来的形状看得更清楚，歪的还是歪的。