6.3 二项式定理

FIG · E3-6-3

01 · 核心定理、公式与阶段边界

通项与二项式定理主公式：

展开式：$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r\cdot a^{n-r}\cdot b^r$

通项公式：

$$T_{r+1}=C_n^r\cdot a^{n-r}\cdot b^r$$

$$(\text{第 } r+1 \text{ 项对应 } b \text{ 的 } r \text{ 次方})$$

赋值法三绝技（设 $f(x)=(ax+b)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$）：

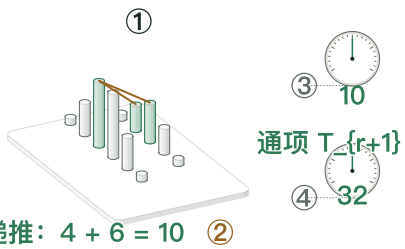
① 所有项系数和：令 $x=1\Longrightarrow f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

② 常数项：令 $x=0\Longrightarrow a_0=f(0)$

③ 偶次项与奇次项和：令 $x=-1$ 算 $f(-1)$，则偶次和为 $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$，奇次和为 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$。

02 · 动手实验台

姿态 A · 基准状态

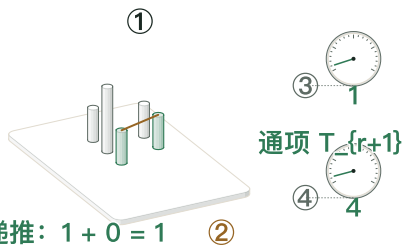


递推：4 + 6 = 10 ②

① 杨辉三角三维帕斯卡分流台 · 第 T_3 项系数 C(5,2) = 10
② 二项式系数和 ∑C(5,k) = 2^5 = 32
③ 系数 C(5,2) · 量程[0, 20]
④ 系数总和 2^5 · 量程[0, 64]

阶数 n 5 · 项指标 r 2

姿态 B · 下界/初始端

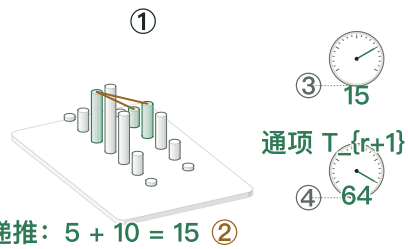


递推：1 + 0 = 1 ②

① 杨辉三角三维帕斯卡分流台 · 第 T_3 项系数 C(2,2) = 1
② 二项式系数和 ∑C(2,k) = 2^2 = 4
③ 系数 C(2,2) · 量程[0, 20]
④ 系数总和 2^2 · 量程[0, 64]

阶数 n 2 · 项指标 r 2

姿态 C · 上界/满量程端



递推：5 + 10 = 15 ②

① 杨辉三角三维帕斯卡分流台 · 第 T_3 项系数 C(6,2) = 15
② 二项式系数和 ∑C(6,k) = 2^6 = 64
③ 系数 C(6,2) · 量程[0, 20]
④ 系数总和 2^6 · 量程[0, 64]

阶数 n 6 · 项指标 r 2

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. $(x+2)^5$ 展开式中 x^3 项的系数为：

☐ A10 ☐ B40 ☐ C80 ☐ D20

2. 已知 $(1+x)^n$ 展开式中所有项的二项式系数之和为 128，则该展开式共有多少项？

☐ A7 项 ☐ B8 项 ☐ C6 项 ☐ D128 项

3. 展开式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 中的第 4 项为：

☐ A20 ☐ B-20 ☐ C$15x^2$ ☐ D$-15x^2$

4. 若 $(2x-3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则该展开式中“各项系数之和”与“各项二项式系数之和”分别为：

☐ A各项系数和为 -1，二项式系数和为 32

☐ B各项系数和为 32，二项式系数和为 32

☐ C各项系数和为 -1，二项式系数和为 -1

☐ D各项系数和为 1，二项式系数和为 32

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}2^r$。

令 $5-r=3 \implies r=2$。

代入求该项系数：$C_5^2\times 2^2=10\times 4=40$。

注意区分：该项的“二项式系数”是 $C_5^2=10$，而“项的系数”是 40。

(2) [B]

B。二项式系数之和公式为 $\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$。

已知 $2^n=128=2^7$，解得 $n=7$。

展开式一共有 $n+1=7+1=8$ **项**！无数考生在此粗心错选 A。

(3) [B]

B。通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=(-1)^r C_6^r x^{6-2r}$。

易错红线 1：求第 4 项必须代入 $r=4-1=3$（不是 $r=4$）！

易错红线 2：负号在奇数次方下必须保留：$(-1)^3=-1$。

因此第 4 项为 $T_4=(-1)^3C_6^3x^{6-6}=-1\times 20\times 1=-20$。漏掉负号就会错选 A。

(4) [A]

A。必须严格区分“系数和”与“二项式系数和”：

① 求各项系数之和：利用赋值法令 $x=1$，左边为 $(2\times 1-3)^5=(-1)^5=-1$，右边恰好是 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$；

② 求二项式系数之和：它仅由组合数决定，恒等于 $C_5^0+C_5^1+\cdots+C_5^5=2^5=32$。

两者含义迥然不同，考场上必须先看清题目问的是哪个词！