5.1 导数的概念及其意义

FIG · E2-5-1

01 · 核心定理、公式与阶段边界

割线斜率（平均变化率）：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

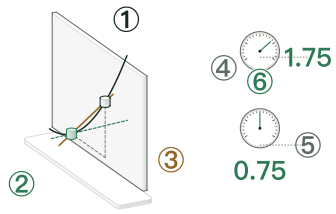
切线斜率（导数定义）：$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=k_{切}$

切线方程（点斜式）：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

平均变化率是割线斜率，瞬时变化率是它在 $\Delta x\to 0$ 时趋于的数，也就是导数，几何上是切线斜率。

02 · 动手实验台

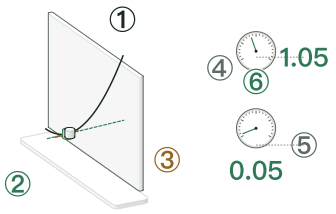
姿态 A · 基准状态



① 割线逼近切线千分表台 · Δx=1.50, Δy/Δx=1.750
② 切点 P(1, 0.5), 极限导数 f′(1)=1.000
③ Δy=2.63, 斜率差 Δy/Δx−f′(1)=+0.750
④ 割线斜率 Δy/Δx · 量程[0, 2.5]
⑤ 逼近误差 Δy/Δx−f′(1) · 量程[0, 1.5]
⑥ Δx→0 ⇒ Δy/Δx→1.00

自变量增量 Δx = 1.50

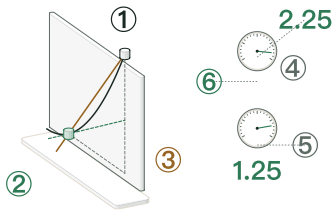
姿态 B · 下界/初始端



① 割线逼近切线千分表台 · Δx=0.10, Δy/Δx=1.050
② 切点 P(1, 0.5), 极限导数 f′(1)=1.000
③ Δy=0.11, 斜率差 Δy/Δx−f′(1)=+0.050
④ 割线斜率 Δy/Δx · 量程[0, 2.5]
⑤ 逼近误差 Δy/Δx−f′(1) · 量程[0, 1.5]
⑥ Δx→0 ⇒ Δy/Δx→1.00

自变量增量 Δx = 0.10

姿态 C · 上界/满量程端



① 割线逼近切线千分表台 · Δx=2.50, Δy/Δx=2.250
② 切点 P(1, 0.5), 极限导数 f′(1)=1.000
③ Δy=5.63, 斜率差 Δy/Δx−f′(1)=+1.250
④ 割线斜率 Δy/Δx · 量程[0, 2.5]
⑤ 逼近误差 Δy/Δx−f′(1) · 量程[0, 1.5]
⑥ Δx→0 ⇒ Δy/Δx→1.00

自变量增量 Δx = 2.50

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=-2$，且 $f(1)=3$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为：

☐ A $2x+y-5=0$　☐ B $2x-y+1=0$　☐ C $x+2y-7=0$　☐ D $2x+y+1=0$

2. 一质点沿直线运动，其位移 s（单位：m）与时间 t（单位：s）满足 $s(t)=3t^2+2$。则在 $t=2\ \mathrm{s}$ 时该质点的瞬时速度为：

☐ A $6\ \mathrm{m/s}$　☐ B $12\ \mathrm{m/s}$　☐ C $14\ \mathrm{m/s}$　☐ D $18\ \mathrm{m/s}$

3. 直线 l 过原点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=x^2+1$ 相切，则满足条件的切线 l 共有几条？

☐ A 0 条　☐ B 1 条　☐ C无数条　☐ D 2 条

4. 关于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数与切线，下列说法中正确的是：

☐ A切线是割线在动点无限逼近切点时的极限位置，切线可以与曲线有其他交点

☐ B若直线与曲线只有一个公共点，则该直线一定是曲线的切线

☐ C函数在某点导数存在，切线方程斜率一定为 0

☐ D切线绝对不能穿过曲线

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。切点为 $(1,3)$，切线斜率 $k=f'(1)=-2$。点斜式切线方程为 $y-3=-2(x-1)\implies y-3=-2x+2\implies 2x+y-5=0$。

(2) [B]

B。瞬时速度就是位移函数对时间的导数：$\Delta s=3(2+\Delta t)^2+2-(3\times 2^2+2)=12\Delta t+3(\Delta t)^2$。平均速度 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=12+3\Delta t$。当 $\Delta t\to 0$ 时，瞬时速度 $v(2)=s'(2)=12\ \mathrm{m/s}$。

(3) [D]

D。注意原点 $(0,0)$ 不在抛物线 $y=x^2+1$ 上，这是一道典型的“**过点切线**”问题！

设切点为 (t,t^2+1)，切线斜率 $k=y'|_{x=t}=2t$。

切线方程为 $y-(t^2+1)=2t(x-t)$。代入原点 $(0,0)$：

$0-(t^2+1)=2t(0-t)\implies -t^2-1=-2t^2\implies t^2=1\implies t=\pm 1$。

存在两个不同的切点 $(1,2)$ 和 $(-1,2)$，对应两条切线 $y=2x$ 与 $y=-2x$。共有 2 条！

(4) [A]

A。A 选项准确表达了导数切线的几何本质；B 选项错误，例如直线 $x=1$ 与抛物线 $y=x^2$ 只有一个公共点，但它与对称轴平行，不是切线；C 选项导数可以是任意实数；D 选项切线可以穿过曲线（如拐点处的切线）。