4.2 等差数列

FIG · E2-4-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

定义式：

$$a_{n+1}-a_n=d$$

$$(\forall n\in\mathbf{N}^*)$$

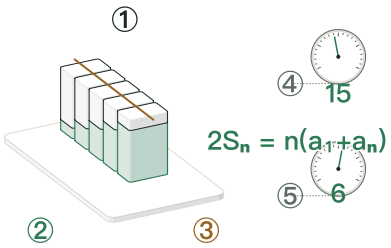
通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$（斜率为 d 的离散直线）

前 n 项和：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$

实数顶点只是“找最值的地方大概在哪”：真正的答案要在它两边的正整数（以及范围端点）里比较出来。

02 · 动手实验台

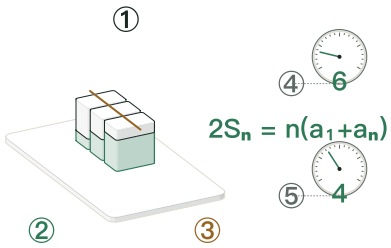
姿态 A · 基准状态



① 等差数列倒序相加三维阶梯台 · n=5, a₁=1.0, d=1.0
② 每列等高 a₁+aₙ = 6.0
③ 前n项和 Sₙ = n(a₁+aₙ)/2 = 15.00
④ 前n项和 Sₙ · 量程[0, 33]
⑤ 单列总高 a₁+aₙ · 量程[0, 11]

项数 n 5 · 公差 d 1.0 · 拼合度 100%

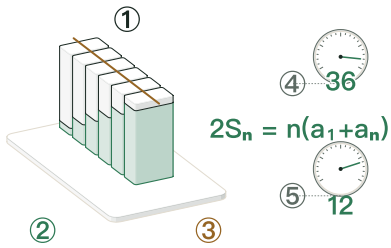
姿态 B · 下界/初始端



① 等差数列倒序相加三维阶梯台 · n=3, a₁=1.0, d=1.0
② 每列等高 a₁+aₙ = 4.0
③ 前n项和 Sₙ = n(a₁+aₙ)/2 = 6.00
④ 前n项和 Sₙ · 量程[0, 33]
⑤ 单列总高 a₁+aₙ · 量程[0, 11]

项数 n 3 · 公差 d 1.0 · 拼合度 100%

姿态 C · 上界/满量程端



① 等差数列倒序相加三维阶梯台 · n=6, a₁=1.0, d=2.0
② 每列等高 a₁+aₙ = 12.0
③ 前n项和 Sₙ = n(a₁+aₙ)/2 = 36.00
④ 前n项和 Sₙ · 自动量程[0, 40]
⑤ 单列总高 a₁+aₙ · 自动量程[0, 15]

项数 n 6 · 公差 d 2.0 · 拼合度 100%

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 等差数列中 $a_3=7$，$a_9=25$，a_1 是?

☐ A 1　☐ B 3　☐ C 4　☐ D -2

2. 等差数列中 $a_2+a_8=16$，S_9 是?

☐ A 72　☐ B 144　☐ C 64　☐ D 81

3. 数列 $5,5,5,5,\ldots$（每一项都是 5）。下面说法对的是?

☐ A不是等差数列，因为公差不能是 0

☐ B是等差数列，$d=0$；$a_n=5$ 是常数，不是非恒定的一次函数

☐ C是等差数列，它的点在一条斜着的直线上

4. 数列的前 n 项和 $S_n=n^2+1$。它是等差数列吗?

☐ A是，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$，公差 2

☐ B不是，a_2-a_1 和后面的相邻差不一样　☐ C是，公差 1

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。第 3 项到第 9 项走 6 步：$6d = 25 - 7 = 18$，$d = 3$；再往回走 2 步：$a_1 = 7 - 2 \times 3 = 1$。选 C 的同学只往回走了 1 步。

(2) [A]

A。$1 + 9 = 2 + 8$，所以 $a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = 16$，$S_9 = \dfrac{9 \times 16}{2} = 72$。不用求出 a_1 和 d。选 B 是忘了除以 2。

(3) [B]

B。每个相邻差都是 0，同一个常数，符合定义，$d = 0$ 完全可以。这时 $a_n = 5$，点排成水平一行；“等差数列的通项是 n 的一次函数、图象斜着”只在 $d \neq 0$ 时成立。在“动手”①把 d 调到 0 就能看到。

(4) [B]

B。$a_1 = S_1 = 2$。$n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$，得 $a_2 = 3$，$a_3 = 5$，$a_4 = 7$。数列是 $2, 3, 5, 7, \ldots$：$a_2 - a_1 = 1$，后面都是 2，不是每一处都一样，不是等差数列。A 错在 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 只对 $n \geq 2$ 成立，第 1 项要单独用 S_1 算；只看后面几项是 2 就下结论，正是“凭几项”。