3.3 抛物线

FIG · E1-3-3

01 · 核心定理、公式与阶段边界

P 在抛物线上 $\iff$ $|PF| = d(P, l)$（焦半径等于准线距）

$$y^2 = 2px \iff F\left(\frac{p}{2}, 0\right),$$

$$l:\ x = -\frac{p}{2}$$

$$\left(|PF| = x_0 + \frac{p}{2}\right)$$

$$x^2 = 2py \iff F\left(0, \frac{p}{2}\right),$$

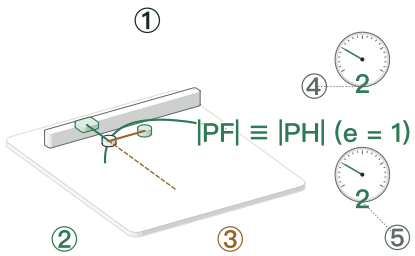
$$l:\ y = -\frac{p}{2}$$

$$\left(|PF| = y_0 + \frac{p}{2}\right)$$

一句话：抛物线上点到焦点的距离，等于到准线的距离。定方程看开口和 p，算距离换成到准线。

02 · 动手实验台

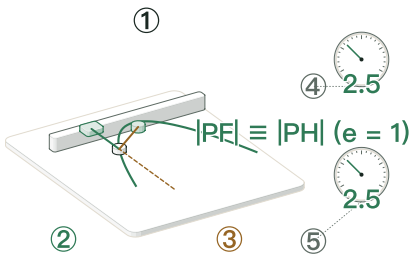
姿态 A · 基准状态



① 抛物线准线滑轨与光学反射实验台 · y²=4x · F(1.00, 0)
② P(1.00, 2.0) · 准线 x=-1.00
③ 焦半径 |PF| = 准线距 |PH| = 2.00
④ 焦半径 |PF|=x₀+p/2 · 量程[0, 8]
⑤ 准线距 |PH|=x₀+p/2 · 量程[0, 8]

焦准距 p 2.0 · 纵坐标 y0 2.0

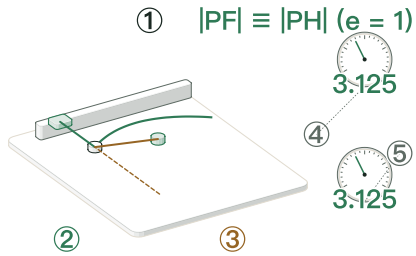
姿态 B · 下界/初始端



① 抛物线准线滑轨与光学反射实验台 · y²=2x · F(0.50, 0)
② P(2.00, 2.0) · 准线 x=-0.50
③ 焦半径 |PF| = 准线距 |PH| = 2.50
④ 焦半径 |PF|=x₀+p/2 · 量程[0, 8]
⑤ 准线距 |PH|=x₀+p/2 · 量程[0, 8]

焦准距 p 1.0 · 纵坐标 y0 2.0

姿态 C · 上界/满量程端



① 抛物线准线滑轨与光学反射实验台 · y²=8x · F(2.00, 0)
② P(1.13, 3.0) · 准线 x=-2.00
③ 焦半径 |PF| = 准线距 |PH| = 3.13
④ 焦半径 |PF|=x₀+p/2 · 量程[0, 8]
⑤ 准线距 |PH|=x₀+p/2 · 量程[0, 8]

焦准距 p 4.0 · 纵坐标 y0 3.0

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 已知抛物线方程为 $y^2 = 8x$，则该抛物线的焦点坐标与准线方程分别为?

☐ **A** 焦点 $(2, 0)$，准线 $x = -2$　☐ **B** 焦点 $(4, 0)$，准线 $x = -4$
☐ **C** 焦点 $(0, 2)$，准线 $y = -2$　☐ **D** 焦点 $(8, 0)$，准线 $x = -8$

2. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 上有一点 $P(x_0, 3)$，则点 P 到该抛物线焦点的距离 $|PF|$ 为?

☐ **A** 3　☐ **B** 4　☐ **C** 5　☐ **D** 7

3. 抛物线 $y = 2x^2$ 的焦点坐标是?

☐ **A** $(0, \frac{1}{2})$ ☐ **B** $(0, \frac{1}{8})$ ☐ **C** $(\frac{1}{8}, 0)$ ☐ **D** $(0, 2)$

4. 平面内到定点 $F(1, 0)$ 的距离等于到定直线 $l: x = 1$ 的距离的点的轨迹是?

☐ **A** 开口向右的抛物线 ☐ **B** 开口向左的抛物线

☐ **C** 直线 $y = 0$（x 轴） ☐ **D** 直线 $x = 1$

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。一次项为 x，系数为 $8>0$，开口向右，焦点在 x 轴正半轴。

牢记核心法则：一次项系数除以 4 得到焦点坐标，$\frac{8}{4}=2$，因此焦点为 $(2,0)$；除以 2 得到焦准距 $p=4$，因此准线方程为 $x=-2$。

选 B 的同学除以了 2；选 C 搞错了坐标轴；选 D 则是直接抄了一次项系数。

(2) [B]

B。直接用焦半径公式与准线转化！抛物线 $x^2=4y$ 中 $2p=4 \implies p=2$，$\frac{p}{2}=1$。准线方程为 $y=-1$。

由抛物线定义，曲线上点 P 到焦点的距离直接等于它到准线的垂直距离：$|PF|=d(P,l)=y_0-(-1)=3+1=4$。完全不需要求出 x_0 的具体数值！

(3) [B]

B。**易错陷阱：非标准方程先化标！**绝不能直接把 2 除以 4！标准方程中平方项系数必须是 1：将 $y=2x^2$ 两边同除以 2，化为标准形式 $x^2=\frac{1}{2}y$。

此时一次项是 y，系数为 $\frac{1}{2}$，开口向上，焦点在 y 轴上。再将一次项系数除以 4：$\frac{1/2}{4}=\frac{1}{8}$，焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$。选 A 是直接拿 2 除以 4；选 C 是搞错了焦点所在轴。

(4) [C]

C。**易错陷阱：定点在定直线上时的轨迹退化！**抛物线定义严格要求定点不在定直线上（$F\notin l$）。

本题中定点 $F(1,0)$ 恰好就在直线 $l:x=1$ 上！设动点 $P(x,y)$，它到直线 l 的垂足为 $H(1,y)$。由 $|PF|=|PH|$ 得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-1|$，两边平方即得 $(x-1)^2+y^2=(x-1)^2 \implies y^2=0 \implies y=0$。轨迹是过点 F 且垂直于 l 的**一条直线**（即 x 轴），并不存在抛物线！