3.2 双曲线

FIG · E1-3-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

标准方程（正项定焦点）：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(c^2=a^2+b^2)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{渐近线：}\ y=\pm\frac{b}{a}x$$

离心率与定义常数：

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1;$$

$$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a<2c$$

平面内到两个定点 F_1,F_2 的距离之差的**绝对值**等于常数 $2a$，并且 $0<2a<|F_1F_2|=2c$，这样的点的轨迹叫双曲线。

$$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$$

焦点在 x 轴：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$F(\pm c,0)$$

焦点在 y 轴：

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

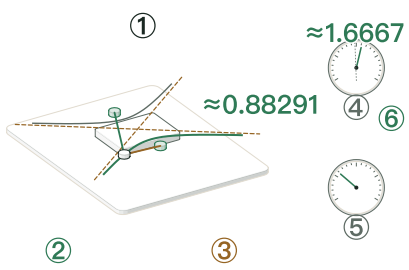
$$F(0,\pm c)$$

其中 $a>0,\ b>0,\ c^2=a^2+b^2$。

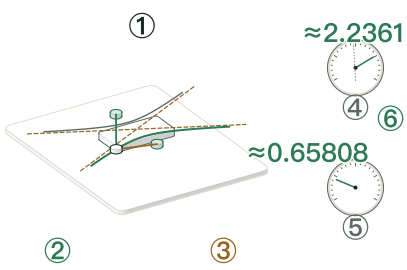
$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}>1$$

02 · 动手实验台

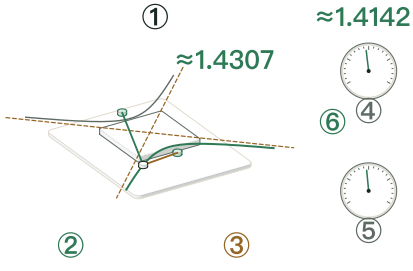
姿态 A · 基准状态



姿态 B · 下界/初始端



姿态 C · 上界/满量程端



① 双焦柱渐近线激光实验台 · x²/a² - y²/b² = 1 · a=3, b=4, c=5
② ||PF₁|-|PF₂|| = 6.0 = 2a
③ 离心率 e=1.67, 渐近线间隙 d=0.88
④ 离心率 e = c/a · 量程[0, 3]
⑤ 渐近线间隙 d · 量程[0, 3]
⑥ c² = a² + b² (e > 1)

实半轴 a = 3 · 虚半轴 b = 4 · 动点 P 延伸度 t = 1

① 双焦柱渐近线激光实验台 · x²/a² - y²/b² = 1 · a=2, b=4, c≈4.4721
② ||PF₁|-|PF₂|| = 4.0 = 2a
③ 离心率 e=2.24, 渐近线间隙 d=0.66
④ 离心率 e = c/a · 量程[0, 3]
⑤ 渐近线间隙 d · 量程[0, 3]
⑥ c² = a² + b² (e > 1)

实半轴 a = 2 · 虚半轴 b = 4 · 动点 P 延伸度 t = 1

① 双焦柱渐近线激光实验台 · x²/a² - y²/b² = 1 · a=5.5, b=5.5, c≈7.7782
② ||PF₁|-|PF₂|| = 11.0 = 2a
③ 离心率 e=1.41, 渐近线间隙 d=1.43
④ 离心率 e = c/a · 量程[0, 3]
⑤ 渐近线间隙 d · 量程[0, 3]
⑥ c² = a² + b² (e > 1)

实半轴 a = 5.5 · 虚半轴 b = 5.5 · 动点 P 延伸度 t = 1

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点坐标与渐近线方程分别为：

☐ **A**焦点 $(\pm5,0)$，渐近线 $y=\pm\frac{4}{3}x$

☐ **B**焦点 $(0,\pm5)$，渐近线 $y=\pm\frac{3}{4}x$

☐ **C**焦点 $(\pm5,0)$，渐近线 $y=\pm\frac{3}{4}x$

☐ **D**焦点 $(\pm\sqrt{7},0)$，渐近线 $y=\pm\frac{4}{3}x$

2. 已知双曲线的中心在原点，焦点在 y 轴上，焦距为 8，离心率 $e=\frac{4}{3}$，则该双曲线的标准方程为：

☐ **A** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$　☐ **B** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$　☐ **C** $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{7}=1$

☐ **D** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

3. 双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{25}=1$ 的实轴长为：

☐ **A** 4　☐ **B** 10　☐ **C** 2　☐ **D** 5

4. 平面内两定点 $F_1(-3,0),F_2(3,0)$，动点 P 满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=6$，则点 P 的轨迹是：

☐ **A**包含左右两支的完整双曲线　☐ **B**双曲线的右支

☐ **C**以 $F_2(3,0)$ 为端点、沿 x 轴正方向的一条射线　☐ **D**线段 F_1F_2

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。① 正项是 x^2，焦点在 x 轴上；$a^2=9 \implies a=3$，$b^2=16 \implies b=4$。

② 由 $c^2=a^2+b^2$ 得 $c^2=9+16=25 \implies c=5$，故焦点坐标为 $(\pm5,0)$（选 D 错用成椭圆的 $c^2=a^2-b^2$）。

③ 令右端为 0：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0 \implies \frac{y^2}{16}=\frac{x^2}{9} \implies y=\pm\frac{4}{3}x$（选 C 倒置了渐近线斜率）。

(2) [A]

A。焦距 $2c=8 \implies c=4$。由离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{a}=\frac{4}{3}$ 得 $a=3 \implies a^2=9$。

再由 $c^2=a^2+b^2$ 得 $b^2=c^2-a^2=16-9=7$。

因为焦点在 y 轴上，正项为 y^2，故标准方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$。选 B 选错焦点轴，选 C 误把半焦距 c 当作实半轴 a。

(3) [A]

A。专题卡核心红线：**正项确定实轴，绝不能看分母大小**！

方程中带正号的项是 y^2 项，因此实半轴平方 $a^2=4 \implies a=2$，虚半轴平方 $b^2=25 \implies b=5$。

实轴长为 $2a=2\times2=4$（切记问的是实轴长 $2a$，不是实半轴 a！选 C 漏乘了 2；选 B 或 D 受椭圆思维定势误把较大的分母 25 当作 a^2）。

(4) [C]

C。计算两定点距离：焦距 $2c=|F_1F_2|=3-(-3)=6$。

题目条件为 $|PF_1|-|PF_2|=6=|F_1F_2|$。根据平面几何两边之差小于第三边，任意点 P 都有 $|PF_1|-|PF_2|\le|F_1F_2|=6$。

当且仅当点 P 落在**以 F_2 为端点且背离 F_1 的射线**（即 $x\ge3, y=0$）上时，才有 $|PF_1|-|PF_2|=(x+3)-(x-3)=6$！

因此轨迹退化为一条射线！只有当常数严格满足 $0<2a<2c$ 且有绝对值时，才是双曲线。