3.1 椭圆

FIG · E1-3-1

01 · 核心定理、公式与阶段边界

标准方程（大分母定焦点）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(a>b>0,$$

$$a^2=b^2+c^2)$$

离心率与定义关系：

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\in(0,1);$$

$$|PF_1|+|PF_2|=2a>2c$$

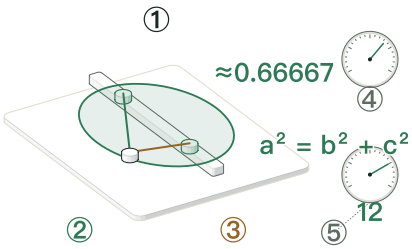
① $2a>2c$：轨迹是**椭圆**；
② $2a=2c$：轨迹是**线段** F_1F_2；
③ $2a<2c$：**没有**这样的点。

先把方程化成“右边是 1、两项分母都为正”的样子，再比分母：**哪个分母大，焦点就在哪条轴上**，大分母是 a^2。

$a^2=b^2+c^2$，a 最大。直角三角形直角边 b,c，斜边 a。
离心率 $e=\dfrac{c}{a}\in(0,1)$：e 越大越扁，e 越小越圆。

02 · 动手实验台

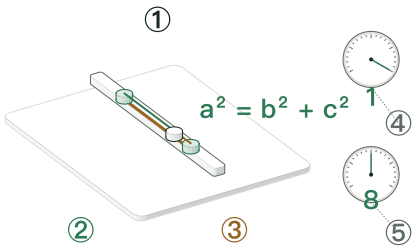
姿态 A · 基准状态



① 双焦柱定长绳椭圆绘图仪 · 椭圆轨迹 b=4.47, e=0.67
② 焦半径 |PF₁|=8.00, |PF₂|=4.00
③ 定长绳和 |PF₁|+|PF₂| = 12.00 = 2a
④ 离心率 e = c/a · 量程[0, 1]
⑤ 绳长 |PF₁|+|PF₂|=2a · 量程[0, 16]

半长轴 a 6 · 半焦距 c 4

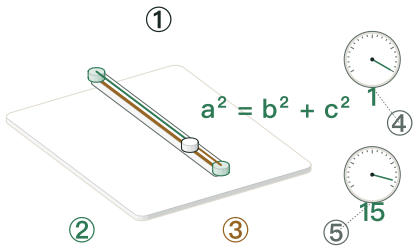
姿态 B · 下界/初始端



① 双焦柱定长绳椭圆绘图仪 · 2a=2c 退化为线段 F₁F₂
② 焦半径 |PF₁|=6.00, |PF₂|=2.00
③ 定长绳和 |PF₁|+|PF₂| = 8.00 = 2a
④ 离心率 e = c/a · 量程[0, 1]
⑤ 绳长 |PF₁|+|PF₂|=2a · 量程[0, 16]

半长轴 a 4 · 半焦距 c 4

姿态 C · 上界/满量程端



① 双焦柱定长绳椭圆绘图仪 · 2a=2c 退化为线段 F₁F₂
② 焦半径 |PF₁|=11.25, |PF₂|=3.75
③ 定长绳和 |PF₁|+|PF₂| = 15.00 = 2a
④ 离心率 e = c/a · 量程[0, 1]
⑤ 绳长 |PF₁|+|PF₂|=2a · 量程[0, 16]

半长轴 a 7.5 · 半焦距 c 7.5

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 已知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$，则该椭圆的长轴长、焦距和离心率分别为?

☐ A长轴长 10，焦距 6，$e=0.6$　☐ B长轴长 5，焦距 3，$e=0.6$
☐ C长轴长 8，焦距 6，$e=0.75$　☐ D长轴长 10，焦距 8，$e=0.8$

2. 已知点 $F_1(-4,0),F_2(4,0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，点 P 在该椭圆上运动。若 $|PF_1|=7$，则 $|PF_2|$ 的长度为?

☐ A1　☐ B3　☐ C5　☐ D7

3.（边界 1：定义退化）平面内动点 P 到两定点 $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ 的距离之和满足 $|PF_1|+|PF_2|=6$，则点 P 的轨迹是？

☐ **A**以 F_1, F_2 为焦点的椭圆　☐ **B**线段 F_1F_2

☐ **C**以原点为圆心、半径为 3 的圆　☐ **D**不存在任何轨迹

4.（边界 3：含参方程与焦点轴向）方程 $\dfrac{x^2}{m+2}+\dfrac{y^2}{5-m}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则实数 m 的取值范围是？

☐ **A**$-2<m<5$　☐ **B**$m<1.5$　☐ **C**$-2<m<1.5$

☐ **D**$1.5<m<5$

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。比较分母：$25 > 16$，所以 $a^2 = 25 \implies a = 5$，$b^2 = 16 \implies b = 4$。

由 $a^2 = b^2 + c^2$ 得 $c^2 = 25 - 16 = 9 \implies c = 3$。

因此长轴长为 $2a = 10$（不是 $a = 5$）；焦距为 $2c = 6$（不是 $c = 3$）；离心率 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} = 0.6$。

选 B 的同学错把半长轴和半焦距当成了长轴长与焦距；选 C 的同学误把小分母当成了长半轴。

(2) [B]

B。直接用定义：方程中 $a^2 = 25 \implies a = 5$，因此定值 $2a = 10$。

验证焦距：$c = \sqrt{25 - 9} = 4$，两焦点恰为 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$。根据椭圆的第一定义，椭圆上的任意点 P 到两焦点距离之和恒等于 $2a$：

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a = 10$$

代入已知 $|PF_1| = 7$，解得 $|PF_2| = 10 - 7 = 3$。选 A 的同学误以为焦半径之差为定值（混淆了双曲线）。

(3) [B]

B。计算两定点间距离：$|F_1F_2| = 3 - (-3) = 6$。

条件中距离之和 $2a = 6$，此时恰好满足 $2a = 2c = 6$！

根据公理"两点之间线段最短"，当且仅当点 P 在线段 F_1F_2 上时，才满足 $|PF_1| + |PF_2| = |F_1F_2| = 6$。若 P 不在连线段上，由三角形两边之和大于第三边，距离之和必定严格大于 6。

因此轨迹退化成了**线段** F_1F_2，不是椭圆！只有满足 $2a > 2c$ 时，轨迹才是真正的椭圆。如果 $2a < 2c$，则无轨迹。

(4) [C]

C。表示椭圆且焦点在 y 轴上，必须同时满足三个硬性条件：

1. x^2 项的分母必须大于 0：$m + 2 > 0 \implies m > -2$；
2. y^2 项的分母必须大于 0：$5 - m > 0 \implies m < 5$；
3. 焦点在 y 轴要求 y^2 项分母严格大于 x^2 项分母：$5 - m > m + 2 \implies 2m < 3 \implies m < 1.5$。

取三者交集，解得 $-2 < m < 1.5$。

选 A 的同学忽略了焦点必须在 y 轴（只列了分母为正）；选 B 的同学漏掉了 $m + 2 > 0$（当 $m \leq -2$ 时分母非正，根本不是椭圆）；选 D 的同学把焦点算到 x 轴上了。