2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

FIG · E1-2-5

01 · 核心定理、公式与阶段边界

垂径定理弦长公式：

$$L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

$$(d < r)$$

两圆相切临界判据：

$$\text{外切} \iff d = r_1 + r_2;$$

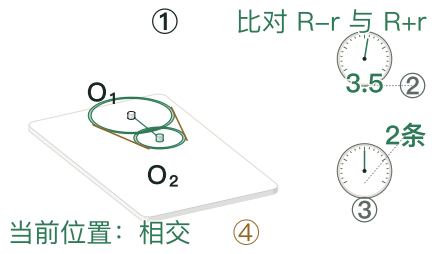
$$\text{内切} \iff d = |r_1 - r_2|$$

$$(r_1 \neq r_2)$$

弦长 $L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

02 · 动手实验台

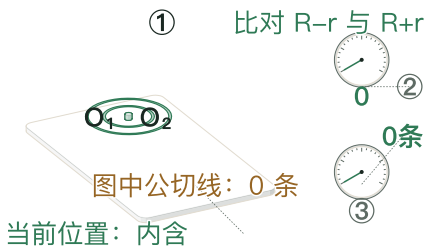
姿态 A · 基准状态



① 双圆位置与公切线 · d=3.5, R+r=4.0, R-r=1.0
② 圆心距 d · 量程[0, 6.5]
③ 公切线数 · 量程[0, 4]条
④ 图中公切线：2 条

圆心距 d 3.5 · 大圆半径 R 2.5 · 小圆半径 r 1.5

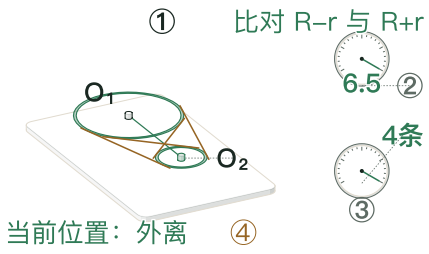
姿态 B · 下界/初始端



① 双圆位置与公切线 · d=0.0, R+r=4.0, R-r=1.0
② 圆心距 d · 量程[0, 6.5]
③ 公切线数 · 量程[0, 4]条

圆心距 d 0.0 · 大圆半径 R 2.5 · 小圆半径 r 1.5

姿态 C · 上界/满量程端



① 双圆位置与公切线 · d=6.5, R+r=4.7, R-r=1.7
② 圆心距 d · 量程[0, 6.5]
③ 公切线数 · 量程[0, 4]条
④ 图中公切线：4 条

圆心距 d 6.5 · 大圆半径 R 3.2 · 小圆半径 r 1.5

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 直线 $2x - y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 的位置关系是?

☐ A相交 ☐ B相切 ☐ C相离

2. 直线 $3x - 4y - 2 = 0$ 被圆 $x^2 + (y-2)^2 = 25$ 截得的弦长是?

☐ A$2\sqrt{21}$ ☐ B$\sqrt{21}$ ☐ C$2\sqrt{29}$ ☐ D10

3. 圆 $x^2 + y^2 = 16$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的位置关系是?

☐ A相交 ☐ B内切 ☐ C内含 ☐ D外离

4. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$。小明把两个方程相减，得到 $8x - 13 = 0$，说“公共弦所在直线是 $8x - 13 = 0$”。对吗?

☐ A对 ☐ B不对：两个圆没有公共点，根本没有公共弦

☐ C不对：减反了，应该是 $8x + 13 = 0$

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。配方：$(x-1)^2+(y-2)^2=5$，圆心 $(1,2)$，$r=\sqrt{5}$。$d=\dfrac{|2-2+5|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=r$，相切。配方时常见的错是把右边写成 0 或 -5：两边都要加上 1 和 4。

(2) [A]

A。圆心 $(0,2)$，$r=5$；$d=\dfrac{|0-8-2|}{5}=2$；弦长 $=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$。B 是半弦；C 把 r^2-d^2 算成了 r^2+d^2；D 是直径。

(3) [C]

C。第二个圆配方：$(x-1)^2+y^2=1$，圆心 $(1,0)$，$r_2=1$；$r_1=4$。圆心距 $d=1$。

$|r_1-r_2|=3$，$d=1<3$，小圆整个在大圆里面，内含。选 A 的同学只比了 $d=1<5=r_1+r_2$：两条分界线 r_1+r_2、$|r_1-r_2|$ 都要比。

(4) [B]

B。第二个圆配方：$(x-4)^2+y^2=4$，圆心 $(4,0)$，$r_2=2$。圆心距 $d=4>1+2=3$，**外离**，没有公共点。

相减本身没算错（谁减谁都是同一条直线），但不相交的两个圆相减也会得到一条直线，它不是公共弦。先判断相交，再相减。