# 1.4 空间向量的应用

FIG · E1-1-4

## 01 · 核心定理、公式与阶段边界

线面角正弦公式：$\sin\theta = \dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$ （$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，互余求正弦）

二面角余弦公式：$\cos\theta = \pm\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$ （正负由图形开口钝锐决定）

点到平面距离公式：$d = \dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$ （$A$ 为平面内任意已知点）

面内取两个不共线向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$：$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0\end{cases}$，取一个非零解。

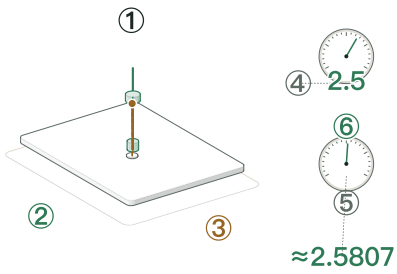
线线平行：$\boldsymbol{u}_1 = \lambda\boldsymbol{u}_2$，且两直线不重合；线线垂直：$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 = 0$。
线面平行：$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$，且直线不在面内；
线面垂直：$\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{n}$。
面面平行：$\boldsymbol{n}_1 = \lambda\boldsymbol{n}_2$（且不重合）；面面垂直：$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0$。

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

分子的绝对值不能漏：数量积可能是负的，距离不会。

## 02 · 动手实验台

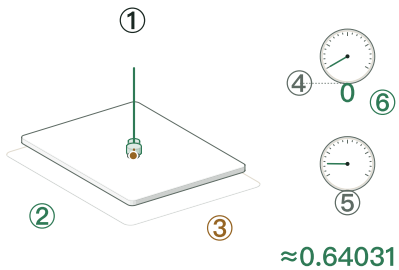
### 姿态 A · 基准状态




① 空间法向量激光测距台 · d = |AP·n| / |n| = 2.5
② 参考点 A(0,0,0), 法向量 n=(0,0,1)
③ 斜向量 |AP|=2.58 → 法向投影高 d=2.5
④ 点面距离 d · 量程[0, 4]
⑤ 斜向量模 |AP| · 量程[0, 5]
⑥ 换点 A 投影高 d 恒不变

点 P 的竖直高度 h= 2.5 · 横向偏移 x= 0.5

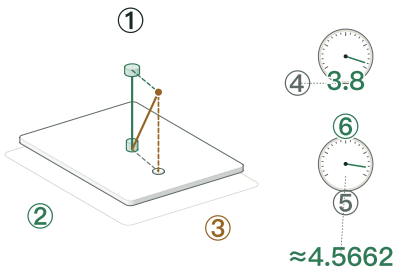
### 姿态 B · 下界/初始端




① 空间法向量激光测距台 · d = |AP·n| / |n| = 0.0
② 参考点 A(0,0,0), 法向量 n=(0,0,1)
③ 斜向量 |AP|=0.64 → 法向投影高 d=0.0
④ 点面距离 d · 量程[0, 4]
⑤ 斜向量模 |AP| · 量程[0, 5]
⑥ 换点 A 投影高 d 恒不变

点 P 的竖直高度 h= 0.0 · 横向偏移 x= 0.5

### 姿态 C · 上界/满量程端




① 空间法向量激光测距台 · d = |AP·n| / |n| = 3.8
② 参考点 A(0,0,0), 法向量 n=(0,0,1)
③ 斜向量 |AP|=4.57 → 法向投影高 d=3.8
④ 点面距离 d · 量程[0, 4]
⑤ 斜向量模 |AP| · 量程[0, 5]
⑥ 换点 A 投影高 d 恒不变

点 P 的竖直高度 h= 3.8 · 横向偏移 x= 2.5

## 03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

**1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以 $D$ 为原点，射线 $DA$、$DC$、$DD_1$ 分别为 $x$、$y$、$z$ 轴的正半轴建立空间直角坐标系。平面 $A_1BD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (1, -1, -1)$。则点 $C_1(0, 1, 1)$ 到平面 $A_1BD$ 的距离 $d$ 为：**

☐ A $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ☐ B $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ C $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ D $\dfrac{1}{3}$

**2. 已知直线 $l$ 的方向向量为 $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1)$，平面 $\alpha$ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (1, 1, 0)$。则直线 $l$ 与平面 $\alpha$ 所成角 $\theta$ 的大小为：**

☐ A $60^\circ$ ☐ B $30^\circ$ ☐ C $45^\circ$ ☐ D $150^\circ$

**3. 某几何体中，观察直观图可知二面角 $\alpha - l - \beta$ 是一个钝二面角。若求得平面 $\alpha$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (1, 2, 2)$，平面 $\beta$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (2, -1, 2)$，则该二面角的余弦值 $\cos\theta$ 为：**

☐ **A** $\dfrac{4}{9}$　☐ **B** $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$　☐ **C** $-\dfrac{4}{9}$　☐ **D** $-\dfrac{\sqrt{65}}{9}$

**4. 在空间直角坐标系中求平面 $\alpha$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，已知平面内有两个不共线向量 $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$ 和 $\boldsymbol{b} = (0, 1, 2)$。某同学解方程组时直接写“令 $x = 1$”，这种解法的问题在于：**

☐ **A** 没有任何问题，未知数可以任意指定非零值

☐ **B** 会求出一个不共线的错误法向量 $(1, -2, 1)$

☐ **C** 会导致求出的向量不是单位向量

☐ **D** 方程 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ 已强制推出 $x = 0$，令 $x = 1$ 产生数学矛盾导致无解

**参考答案与防坑要点：**

**(1) [A]**

**A**。按所给三条棱建轴，$A_1(1,0,1)$、$B(1,1,0)$、$C_1(0,1,1)$。平面 $A_1BD$ 经过点 $D(0,0,0)$，所以 $\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$；$DC_1$ 是边长为 1 的侧面上的对角线，长为 $\sqrt{2}$。

计算数量积：$\overrightarrow{DC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\times1+1\times(-1)+1\times(-1)=-2$。

法向量模长：$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$。

套用点面距离公式：$d=\dfrac{|\overrightarrow{DC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

**(2) [B]**

**B**。套用线面角正弦公式：

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0\times1+1\times1+1\times0=1$。

$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$。

因此 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$。

因线面角 $\theta\in[0,90^\circ]$，所以 $\theta=30^\circ$。千万不要误将结果当作 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 而误选 $60^\circ$！

**(3) [C]**

**C**。高频命题陷阱！绝不能机械取绝对值！

计算法向量夹角余弦值：

$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=1\times2+2\times(-1)+2\times2=2-2+4=4$。

$|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{1+4+4}=3$，$|\boldsymbol{n}_2|=\sqrt{4+1+4}=3$。

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{4}{3\times3}=\dfrac{4}{9}$。

因为题目已明确指明该二面角为**钝二面角**，其余弦值必为负值！故 $\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$。若盲目填 $\dfrac{4}{9}$，则直接把钝角误判为锐角。

**(4) [D]**

**D**。专题卡 E1-01-B 严格明确：某一分量可否设为 1 由方程决定，不能无条件指定！

由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0\implies x=0$。

此平面的法向量在 $x$ 轴上的分量必须严格等于 0！若盲目强行令 $x=1$，立刻出现 $1=0$ 的逻辑矛盾。正确做法是令 $z=1$，由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=y+2z=0$ 解得 $y=-2$，得到法向量 $\boldsymbol{n}=(0,-2,1)$。