1.3 空间向量及其运算的坐标表示

FIG · E1-1-3

01 · 核心定理、公式与阶段边界

向量坐标定义：$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=$ 终点 $-$ 起点

数量积坐标公式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$　（两向量非零时，垂直充要条件为该式 $=0$）

空间两点距离公式：$d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$：

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

终点减起点。

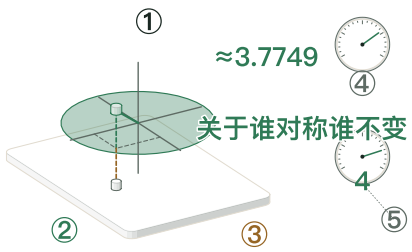
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

02 · 动手实验台

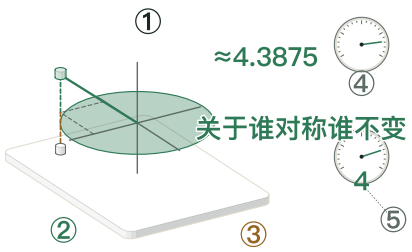
姿态 A · 基准状态



① 空间直角坐标系与对称点卡尺台 · P(2.0, 2.5, 2.0)
② 模长 |OP| = √(x²+y²+z²) = 3.77
③ 关于xOy对称 P'(2.0,2.5,-2.0)
④ 空间模长 |OP| · 量程[0, 5.2]
⑤ 对称间距 |PP'| · 量程[0, 5]

坐标 x 2.0 · 坐标 y 2.5 · 坐标 z 2.0

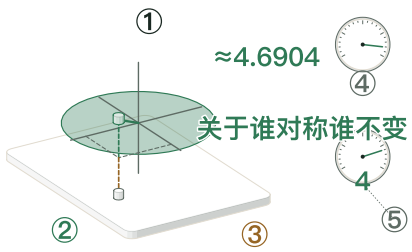
姿态 B · 下界/初始端



① 空间直角坐标系与对称点卡尺台 · P(-3.0, 2.5, 2.0)
② 模长 |OP| = √(x²+y²+z²) = 4.39
③ 关于xOy对称 P'(-3.0,2.5,-2.0)
④ 空间模长 |OP| · 量程[0, 5.2]
⑤ 对称间距 |PP'| · 量程[0, 5]

坐标 x -3.0 · 坐标 y 2.5 · 坐标 z 2.0

姿态 C · 上界/满量程端



① 空间直角坐标系与对称点卡尺台 · P(3.0, 3.0, 2.0)
② 模长 |OP| = √(x²+y²+z²) = 4.69
③ 关于xOy对称 P'(3.0,3.0,-2.0)
④ 空间模长 |OP| · 量程[0, 5.2]
⑤ 对称间距 |PP'| · 量程[0, 5]

坐标 x 3.0 · 坐标 y 3.0 · 坐标 z 2.0

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,0,1)$，则向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模长等于：

☐ A5　☐ B$\sqrt{13}$　☐ C7　☐ D25

2. 已知空间两点 $A(1,2,3)$、$B(3,-2,1)$，点 M 是线段 AB 的中点，则中点 M 的坐标以及线段 AB 的长度 $|AB|$ 分别为：

☐ A$M(2,0,2)$，$|AB|=2\sqrt{6}$　☐ B$M(2,0,2)$，$|AB|=6$

☐ C$M(1,-2,-1)$，$|AB|=2\sqrt{6}$　☐ D$M(4,0,4)$，$|AB|=24$

3.【边界 5：含 0 分量共线判定】已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(2,0,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,y,z)$。若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则实数对 (y,z) 的值为：

☐ **A** $(0,2)$　☐ **B** 无法确定，因为分母含 0 不能成比例　☐ **C** $(0,-2)$

☐ **D** $(1,2)$

4.【边界 1：直角坐标轴必须正交】在空间几何体中建立空间直角坐标系，下列选轴做法中合规且正确的是：

☐ **A** 在任意底面为平行四边形、侧棱倾斜的四棱柱中，直接以共顶点的三条侧棱所在直线分别为 x,y,z 轴

☐ **B** 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，直接以棱 AB,AC,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴

☐ **C** 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 D 为原点，射线 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴

☐ **D** 在正四面体 $ABCD$ 中，直接以共顶点的三条侧棱 AB,AC,AD 所在直线分别为 x,y,z 轴

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。先算坐标线性组合：$2\boldsymbol{a}=(2,4,-4)$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+(-2),4+0,-4+1)=(0,4,-3)$。再利用模长公式：$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$。注意模长不能直接把各向量模长相加。

(2) [A]

A。中点坐标为各对应坐标算术平均数：$M\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+(-2)}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(2,0,2)$。两点间距离为两点式向量模长：$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$。

(3) [A]

A。根据空间向量平行的充要条件：存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

即 $(-1,y,z)=\lambda(2,0,-4)\implies -1=2\lambda\implies\lambda=-\frac{1}{2}$。

代入其余分量：$y=-\frac{1}{2}\times 0=0$，$z=-\frac{1}{2}\times(-4)=2$。

警示：很多同学误以为分量含 0 时“不能平行”或“比例无意义”，其实分母为 0 只是提醒我们不能写成坐标相除，而必须严格用数乘方程 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 求解！

(4) [C]

C。空间直角坐标系必须依赖“单位正交基底”（三条坐标轴必须两两垂直）。

长方体从同一顶点出发的三条棱两两互相垂直，符合建系条件；而正三棱柱底面是正三角形，$\angle BAC=60^\circ\neq 90^\circ$；正四面体各面都是等边三角形，侧棱两两夹角也为 60°；斜四棱柱的棱更不是直角。绝不能随意把斜棱当作坐标轴，建系前必须先证明轴的两两垂直！