1.2 空间向量基本定理

FIG · E1-1-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

空间向量基本定理：$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ （实数组 (x,y,z) 唯一存在）
共面向量充要条件：$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ （$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线）
四点共面：先有基底 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$，且已知 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$。
此时 $P\in$ 平面 $ABC \iff x+y+z=1$

$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 能做空间的基底 $\iff$ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面。

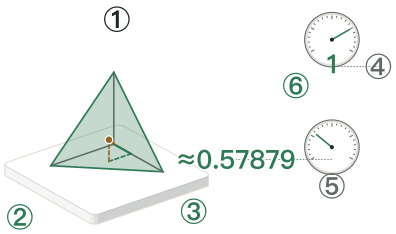
空间向量基本定理：如果三个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x,y,z)，使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$$

P,A,B,C 四点共面 $\iff$ $x+y+z=1$

02 · 动手实验台

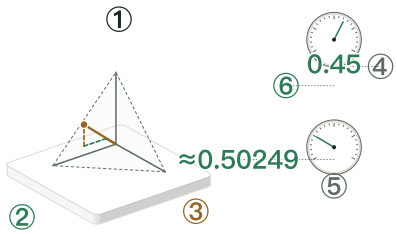
姿态 A · 基准状态



① 三维基底 Gantry 龙门定位仪 · OP = 0.35e₁ + 0.35e₂ + 0.30e₃
② 三轴滑台阶梯：(x,y,z)= (0.35,0.35,0.30)
③ 系数和 x+y+z = 1.00 ✓ 四点共面
④ 系数和 x+y+z · 量程[-2, 2]
⑤ 正交模长 |OP| · 量程[0, 2]
⑥ x+y+z=1 ⇔ P∈平面ABC

基向量 e1 系数 x = 0.35 · 基向量 e2 系数 y = 0.35 · 基向量 e3 系数 z = 0.30

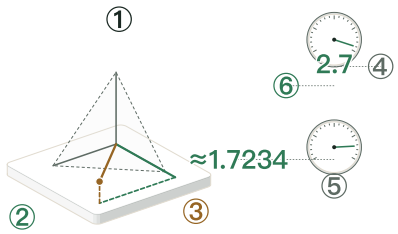
姿态 B · 下界/初始端



① 三维基底 Gantry 龙门定位仪 · OP = -0.20e₁ + 0.35e₂ + 0.30e₃
② 三轴滑台阶梯：(x,y,z)= (-0.20,0.35,0.30)
③ 系数和 x+y+z = 0.45 ✕ 不共面
④ 系数和 x+y+z · 量程[-2, 2]
⑤ 正交模长 |OP| · 量程[0, 2]
⑥ x+y+z=1 ⇔ P∈平面ABC

基向量 e1 系数 x = -0.20 · 基向量 e2 系数 y = 0.35 · 基向量 e3 系数 z = 0.30

姿态 C · 上界/满量程端



① 三维基底 Gantry 龙门定位仪 · OP = 1.20e₁ + 1.20e₂ + 0.30e₃
② 三轴滑台阶梯：(x,y,z)= (1.20,1.20,0.30)
③ 系数和 x+y+z = 2.70 ✕ 不共面
④ 系数和 x+y+z · 自动量程[-3, 3]
⑤ 正交模长 |OP| · 量程[0, 2]
⑥ x+y+z=1 ⇔ P∈平面ABC

基向量 e1 系数 x = 1.20 · 基向量 e2 系数 y = 1.20 · 基向量 e3 系数 z = 0.30

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 已知四面体 $O-ABC$ 中，$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 构成一组基底，点 M 为棱 BC 的中点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{PM}$。则向量 $\overrightarrow{AP}$ 用该基底表示为：

☐ A $-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ ☐ B $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
☐ C $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ ☐ D $-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

2. 已知空间四点 P,A,B,C 满足关系式 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$（其中 O 是平面 ABC 外的任意一点，A,B,C 不共线）。若 P,A,B,C 四点共面，则实数 λ 的值为：

☐ A $\frac{1}{6}$ ☐ B $-\frac{1}{6}$ ☐ C $\frac{5}{6}$ ☐ D 1

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间中的三个向量，下列命题中正确的是：

☐ **A**若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两不共线，则它们必能构成空间的一个基底

☐ **B**若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有一个是零向量，只要其余两向量不共线，也能构成基底

☐ **C**若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，则对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一有序实数组 (x,y,z) 使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$

☐ **D**若存在不全为零的实数 x,y,z 使得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 能构成基底

4. 在棱长均为 1、底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle PAB=\angle PAD=60^\circ$。若取 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$ 为基底，计算向量 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}$ 的模长 $|\overrightarrow{PC}|$。某同学直接按直角坐标套用 $\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$。这种做法错在：

☐ **A**向量分解关系写错了，$\overrightarrow{PC}$ 应该等于 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP}$

☐ **B**$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$ 是斜基底，展开模长平方时忽略了夹角余弦的数量积交叉项

☐ **C**空间向量不能用来计算立体几何中的线段长度

☐ **D**基底选错了，空间中不能以同一个顶点的三条相交棱为基底

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。化简共线关系：$\overrightarrow{OP}=2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}) \implies 3\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM} \implies \overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$。

因为 M 是 BC 的中点，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，代入得：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

因此 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$。

(2) [A]

A。题中 A,B,C 不共线且 O 在平面 ABC 外，所以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 不共面。在此前提下，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 P,A,B,C 四点共面当且仅当 $x+y+z=1$。

直接代入：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\lambda=1 \implies \frac{5}{6}+\lambda=1 \implies \lambda=\frac{1}{6}$。

(3) [C]

C。逐项剖析红线边界：

- **A 错**：两两不共线不等于不共面！正三角形的三边向量两两不共线，但共面，绝不能作空间基底；
- **B 错**：零向量与任意向量共面，基向量必须全为非零向量；
- **D 错**：若存在不全为零的系数使线性组合为零向量，说明这三个向量线性相关（共面），恰恰不能构成基底；
- **C 对**：空间向量基本定理的核心定义与唯一性。

(4) [B]

B。直角坐标模长公式仅在单位正交基底下成立。

本题中 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$（数量积为 0），但 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 的夹角均为 60°，数量积为 $1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$。

正确计算展开式必须保留交叉项：

$$|\overrightarrow{PC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AP}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}$$

$$=1+1+1+0-2\left(\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)=3-1-1=1$$

故真实长度 $|\overrightarrow{PC}|=1$，绝不是 $\sqrt{3}$！