1.1 空间向量及其运算

FIG · E1-1-1

01 · 核心定理、公式与阶段边界

数量积定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\cos\theta$
空间垂直充要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$
空间折线加法：$\overrightarrow{A_1A_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$，封闭空间多边形回路总和恒为 $\boldsymbol{0}$

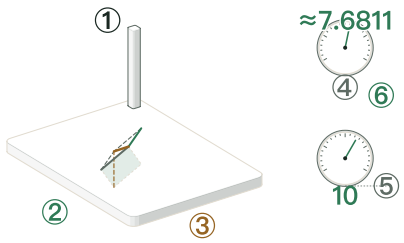
首尾相接，结果从第一个起点指向最后一个终点；绕一圈回到起点，和是 $\boldsymbol{0}$。

共线：$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；共面：$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线）。用平面外一点 O 展开时，四点共面 $\iff$ 系数和 $=1$。

求长度先平方：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，交叉项别丢。

02 · 动手实验台

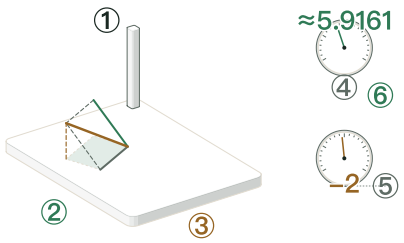
姿态 A · 基准状态



① 空间平行四边形合成台 · a+b = (5, 5, 3)
② 向量 a=(3,1,3), |a|=4.36
③ 合向量 |a+b|=7.68, a·b=10.0
④ 合模长 |a+b| · 量程[0, 14]
⑤ 数量积 a·b · 量程[-40, 40]
⑥ 空间平行四边形对角线

横向 x 3 · 进深 y 1 · 垂直 z 3 · 横向 x 2 · 进深 y 4 · 垂直 z 0

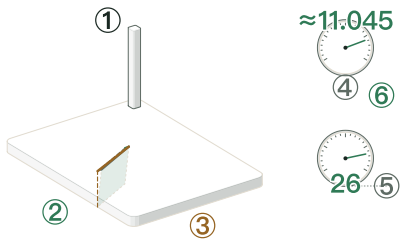
姿态 B · 下界/初始端



① 空间平行四边形合成台 · a+b = (-1, 5, 3)
② 向量 a=(-3,1,3), |a|=4.36
③ 合向量 |a+b|=5.92, a·b=-2.0
④ 合模长 |a+b| · 量程[0, 14]
⑤ 数量积 a·b · 量程[-40, 40]
⑥ 空间平行四边形对角线

横向 x -3 · 进深 y 1 · 垂直 z 3 · 横向 x 2 · 进深 y 4 · 垂直 z 0

姿态 C · 上界/满量程端



① 空间平行四边形合成台 · a+b = (7, 8, 3)
② 向量 a=(5,4,3), |a|=7.07
③ 合向量 |a+b|=11.05, a·b=26.0
④ 合模长 |a+b| · 量程[0, 14]
⑤ 数量积 a·b · 量程[-40, 40]
⑥ 空间平行四边形对角线

横向 x 5 · 进深 y 4 · 垂直 z 3 · 横向 x 2 · 进深 y 4 · 垂直 z 0

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，化简空间折线回路向量表达式 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{D_1A_1}$ 的结果是?

☐ A $\overrightarrow{AB_1}$ ☐ B $\overrightarrow{AC_1}$ ☐ C $\overrightarrow{AD_1}$ ☐ D $\boldsymbol{0}$

2. 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3$，且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$。则数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为?

☐ A $\frac{10}{3}$ ☐ B $-\frac{10}{3}$ ☐ C 5 ☐ D $\frac{5}{3}$

3. 下列关于空间向量概念与共面性的命题中，正确的是哪一个?

☐ A若空间两直线 l_1,l_2 异面，则分别在两直线上的方向向量也是"异面向量"

☐ B空间任意三个向量，只要它们两两不共线，就一定不共面（能构成空间基底）

☐ C空间中任意两个非零向量一定共面

☐ D若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，则 P,A,B,C 四点必共面

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间中三个非零向量，下列运算律中恒成立的是:

☐ A若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ☐ B$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

☐ C若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ☐ D若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 必为钝角

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。逐步相加：前三项首尾相连 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$。在正方体顶面中，棱向量 $\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{C_1B_1}$。故原式 $=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{AB_1}$。

(2) [A]

A。由垂直充要条件，两向量数量积为 0：

$$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0。$$

代入模长 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3$：$2\times4+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\times9=0\implies8+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-18=0\implies3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{10}{3}$。

(3) [C]

C。逐项辨析核心边界：

C 正确：空间向量是自由向量，平移到同一起点后必在同一平面内，空间中**绝对不存在“异面向量”**。

A 错误：直线可以异面，但向量可自由平移，不存在异面向量概念。

B 错误：两两不共线不等于不共面！例如正三角形的三边向量两两不共线，但完全共面。

D 错误：取 $O=(0,0,0),A=(1,0,0),B=(0,1,0),C=(0,0,1)$，得 $P=(1/2,1/3,1/4)$ 不在 $ABC:x+y+z=1$ 内。该判据须 A,B,C 不共线、O 在面外。

(4) [C]

C。辨析数量积的关键边界：

C 恒成立：两向量已知非零，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\iff\cos\theta=0\iff\theta=90^\circ\iff\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

A 错误：数量积没有消去律！$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$ 可能是 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，不能推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。

B 不恒成立：例如 $\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(1,1,0),\boldsymbol{c}=(0,1,0)$，两边分别为 $(0,1,0)$ 和 $(1,0,0)$。这说明不能套用结合律，并不表示任意取值都不相等。

D 错误：夹角可能是 180°（反向平角），平角不是钝角。