8.6 空间直线、平面的垂直

FIG · B2-8-6

01 · 核心定理、公式与阶段边界

$$\text{判定定理（相交线）：}\left.\begin{array}{l} l\perp a,\ l\perp b \\ a\subset\alpha,\ b\subset\alpha \\ a\cap b=P \end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp\alpha$$

$$\text{性质定理（任意线）：}\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ c\subset\alpha \end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp c$$

平行线推论：垂直于同一个平面的两条直线互相平行（$a\perp\alpha, b\perp\alpha \Longrightarrow a\parallel b$）。

① **找垂足**：过斜线上一点向平面引垂线，定出垂足；
② **连射影**：连接斜足与垂足，得到斜线在平面上的正射影；
③ **解直角三角形**：斜线、垂线段、射影构成直角三角形，斜线与射影的夹角就是线面角 θ，满足 $\sin\theta=\dfrac{\text{垂线段长}}{\text{斜线段长}}$。

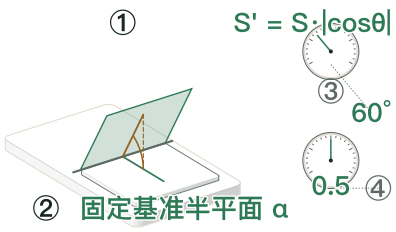
$$\text{面面垂直判定（线面推面面）：}\left.\begin{array}{l} l\perp\beta \\ l\subset\alpha \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\perp\beta$$

$$\text{面面垂直性质（垂直于交线）：}\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta,\ \alpha\cap\beta=l \\ a\subset\alpha,\ a\perp l \end{array}\right\}\Longrightarrow a\perp\beta$$

核心铁律：面面垂直性质是立体几何中**最关键的立高引线工具**！必须牢记"面内垂直于交线"才能推出垂直底面。

02 · 动手实验台

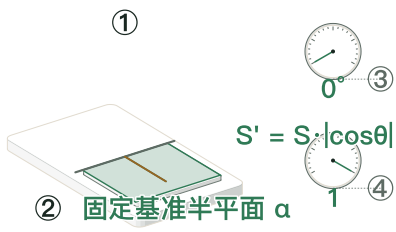
姿态 A · 基准状态



① 等距双平板铰链台 · 二面角平面角 ∠AOB = 60°
② 公共棱 l (OA⊥l, OB⊥l)
③ 二面角 θ · 量程[0°, 180°]
④ 射影面积比 |cosθ| · 量程[0, 1]

二面角开合角度 θ= 60°

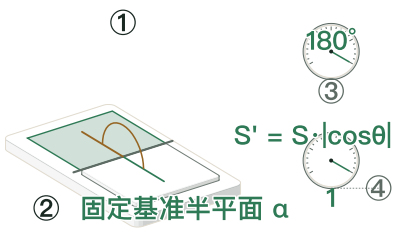
姿态 B · 下界/初始端



① 等距双平板铰链台 · 二面角平面角 ∠AOB = 0°
② 公共棱 l (OA⊥l, OB⊥l)
③ 二面角 θ · 量程[0°, 180°]
④ 射影面积比 |cosθ| · 量程[0, 1]

二面角开合角度 θ= 0°

姿态 C · 上界/满量程端



① 等距双平板铰链台 · 二面角平面角 ∠AOB = 180°
② 公共棱 l (OA⊥l, OB⊥l)
③ 二面角 θ · 量程[0°, 180°]
④ 射影面积比 |cosθ| · 量程[0, 1]

二面角开合角度 θ= 180°

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 设 l 是一条直线，α 是一个平面。下列条件中，能够充分判定 $l\perp\alpha$ 的是：

☐ A l 垂直于 α 内的无数条平行直线
☐ B l 垂直于 α 内的两条相交直线
☐ C l 垂直于 α 内的一个梯形的两条底边
☐ D l 垂直于 α 内的一条已知直线

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，体对角线 A_1C 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值 $\tan\theta$ 等于：

☐ A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　☐ B $\sqrt{2}$　☐ C $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　☐ D $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. 若平面 $\alpha \perp$ 平面 β，直线 $m \subset \alpha$，直线 $n \subset \beta$，则直线 m 与 n 的位置关系：

☐ **A**必垂直　☐ **B**必是异面直线　☐ **C**平行、相交或异面都有可能

☐ **D**绝不可能平行

4. 设 m, n 是两条不同的空间直线，α, β 是两个不同的平面。下列命题中真命题是：

☐ **A**若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$

☐ **B**若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha$，则 $m \perp \beta$

☐ **C**若 $\alpha \perp \beta, m \perp \beta$，则 $m \subset \alpha$

☐ **D**若 $m \perp \alpha, m \perp n$，则 $n \parallel \alpha$

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。线面垂直判定定理的核心条件是垂直于平面内的“**两条相交直线**”。梯形的两底边互相平行，无数条平行线在方向上等价于一条线，直线可绕平行线倾斜而与平面不垂直。只有相交的两条直线才能唯一确定平面方向，从而锁定垂直。

(2) [A]

A。设正方体棱长为 1。点 A_1 在底面 $ABCD$ 上的正射影为点 A，所以斜线 A_1C 在底面上的正射影为对角线 AC。

在直角三角形 $\triangle A_1AC$ 中，$\angle A_1AC=90^\circ$，垂直高 $A_1A=1$，射影长 $AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$。因此线面角的正切值 $\tan\theta=\dfrac{A_1A}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

(3) [C]

C。高频易错！“面面垂直”绝不等于“两个面内的任意两条直线互相垂直”！

反例与分类：设两平面的交线为 l。

① 若 $m\parallel l$ 且 $n\parallel l$，则根据平行公理 $m\parallel n$（两直线可以**互相平行**）；

② 若 $m\perp l$ 且垂足为 P，n 经过点 P 且不垂直 l，则 m 与 n **相交**；

③ 若两条线不共面，则是**异面直线**（可垂直也可斜交）。

只有当面内直线垂直于交线时，它才垂直于另一个平面，从而垂直于另一个平面内的任意直线。

(4) [A]

A。逐项辨析：

A. **正确**：垂直于同一条直线的两个平面互相平行（线面垂直的重要推论）；

B. **错误**：必须 m 垂直于两平面的交线，才能推得 $m\perp\beta$；

C. **错误**：直线 m 可以在 α 内，也可以与 α 平行（$m\parallel\alpha$）；

D. **错误**：直线 n 可以在平面 α 内（由 $m\perp\alpha$ 知 m 垂直于 α 内任意直线，若 $n\subset\alpha$ 同样有 $m\perp n$）。