8.3 简单几何体的表面积与体积

FIG · B2-8-3

01 · 核心定理、公式与阶段边界

圆柱侧面积：$S_{侧} = 2\pi r h$

圆锥侧面积：$S_{侧} = \pi r l$

圆台侧面积：$S_{侧} = \pi(r_1 + r_2)l$

圆锥侧面展开是扇形：半径等于母线 l，弧长等于底面周长 $2\pi r$，圆心角 $\theta = 360^\circ \times \dfrac{r}{l}$

柱体：$V = Sh$

锥体：$V = \dfrac{1}{3}Sh$

台体：

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

台体公式是通式：$S_1 = 0$ 退化为锥体 $V = \frac{1}{3}S_2 h$；$S_1 = S_2 = S$ 退化为柱体 $V = Sh$。

球表面积：$S = 4\pi R^2$

球体积：$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

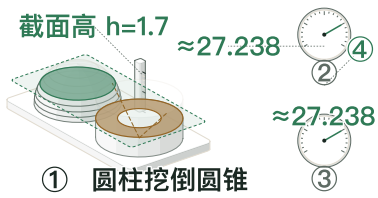
墙角模型外接球：

$$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

球表面积是大圆面积的 4 倍；长方体体对角线长等于外接球直径 $2R$。

02 · 动手实验台

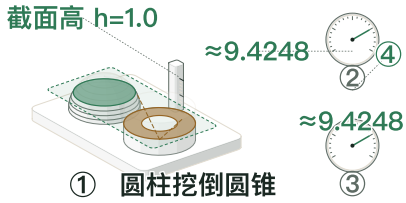
姿态 A · 基准状态



① 半球体 (半径 R=3.4)
② 左：圆截面 S_1 · 量程[0, ≈36.317]
③ 右：圆环面 S_2 · 量程[0, ≈36.317]
④ $S_1 = S_2$ 恒成立

球/柱半径 R= 3.4 · 截面高度比 h/R= 1.70 (50%)

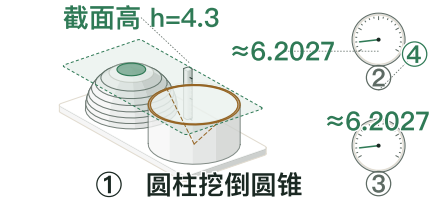
姿态 B · 下界/初始端



① 半球体 (半径 R=2.0)
② 左：圆截面 S_1 · 量程[0, ≈12.566]
③ 右：圆环面 S_2 · 量程[0, ≈12.566]
④ $S_1 = S_2$ 恒成立

球/柱半径 R= 2.0 · 截面高度比 h/R= 1.00 (50%)

姿态 C · 上界/满量程端



① 半球体 (半径 R=4.5)
② 左：圆截面 S_1 · 量程[0, ≈63.617]
③ 右：圆环面 S_2 · 量程[0, ≈63.617]
④ $S_1 = S_2$ 恒成立

球/柱半径 R= 4.5 · 截面高度比 h/R= 4.27 (95%)

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 已知一个球的表面积为 36π，则该球的体积为：

☐ A 18π　☐ B 27π　☐ C 36π　☐ D 48π

2. 一个圆台的上、下底面半径分别为 1 和 3，高为 3，则该圆台的体积为：

☐ A 12π　☐ B 13π　☐ C 14π　☐ D 39π

3. 某工件由一个底面半径为 1、高为 2 的圆柱和一个底面半径为 1、母线长为 2 的圆锥拼接而成（圆锥底面与圆柱上底面完全贴合）。则该工件的表面积为：

☐ A 6π　☐ B 7π　☐ C 8π　☐ D 9π

4. 若一个圆锥的侧面展开图是一个半圆（圆心角为 180°），且该半圆展开图的面积为 8π，则该圆锥的底面半径 r 和垂直高 h 分别为：

☐ A $r=2,\ h=2$　☐ B $r=2,\ h=2\sqrt{3}$　☐ C $r=4,\ h=2\sqrt{3}$

☐ D $r=2\sqrt{3},\ h=2$

参考答案与防坑要点：

(1) [C]

C。由球的表面积公式 $S=4\pi R^2=36\pi$，解得 $R^2=9$，因为半径 $R>0$，所以 $R=3$。再代入球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 3^3=36\pi$。

(2) [B]

B。上底面积 $S_1=\pi\times 1^2=\pi$，下底面积 $S_2=\pi\times 3^2=9\pi$。代入台体体积公式：

$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)=\frac{1}{3}\times 3\times(\pi+\sqrt{\pi\cdot 9\pi}+9\pi)=\pi+3\pi+9\pi=13\pi$$

(3) [B]

B。组合体表面积是**外露在外部的所有面积之和**，内部重合贴合的接触面**绝不能算入表面积**！

外露表面由三部分组成：

① 圆柱下底面：$S_1=\pi r^2=\pi\times 1^2=\pi$；

② 圆柱侧面：$S_2=2\pi rh=2\pi\times 1\times 2=4\pi$；

③ 圆锥侧面：$S_3=\pi rl=\pi\times 1\times 2=2\pi$。

总表面积 $S=S_1+S_2+S_3=\pi+4\pi+2\pi=7\pi$。

易错警示：如果把圆柱全面积 6π 与圆锥全面积 3π 盲目相加得到 9π，就多算了贴合在内部的两个接触面。

(4) [B]

B。绝不能把展开扇形的母线长误认作圆锥的高！

展开扇形的半径是圆锥的母线长 l。半圆面积为 $\frac{1}{2}\pi l^2=8\pi\implies l^2=16\implies l=4$。

展开扇形的圆心角 $\theta=\pi=2\pi\times\frac{r}{l}\implies\frac{r}{4}=\frac{1}{2}\implies r=2$。

垂直高由勾股定理求得：$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$。