8.2 立体图形的直观图

FIG · B2-8-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

x' 轴方向：平行仍平行，长度保持 1 倍不变

y' 轴方向：夹角成 $45°$，长度折半变为 $\frac{1}{2}$

z' 轴方向（空间高）：竖直向上保持 $90°$，高度保持原长

其余非平行于坐标轴的斜线段（如对角线、斜腰），**一律不可直接折半或翻倍**，必须先定端点再连线！

$$S' = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot S$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$S = 2\sqrt{2} \cdot S'$$

推导本源：底边平行于 x 轴长度保持 a；原高 h 折半为 $\frac{h}{2}$，因倾斜 $45°$，垂直高度变为 $\frac{h}{2}\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}h$。底不变高乘 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，总面积乘 $\frac{\sqrt{2}}{4}$！

实时对比结论：

① **底边之比**：$b'/b = 1.000$（横向平行线段长度保持不变）；

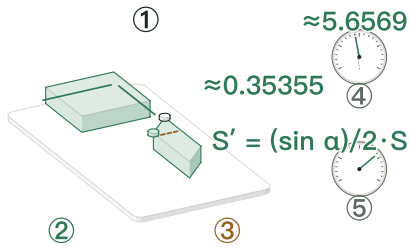
② **垂直高之比**：$H'/h = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.354$（纵向折半后再乘 $\sin 45°$）；

③ **面积比值**：$S'/S = 0.354$（精确值 $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.354$ 恒定不变！）；

④ **周长变化**：原周长 16.00 变为直观图周长 12.00（周长不保持常数比）。

02 · 动手实验台

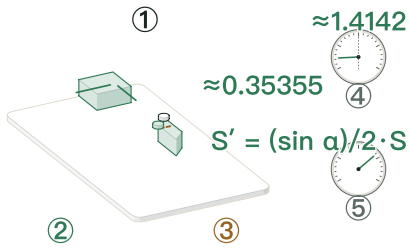
姿态 A · 基准状态



① 斜二测画法投影夹具台 · x′=x, y′=y/2, ∠x′O′y′=45°
② 原图边长 a=4.0, S=16.00
③ 直观图 S′≈5.66 (比值≈0.354)
④ 直观图面积 S′ · 量程[0, 12.5]
⑤ 面积比 S′/S · 量程[0, 0.5]

原图边长 a 4.0 · 坐标夹角 α 45°

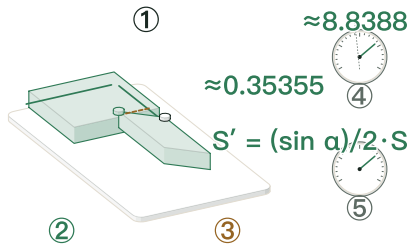
姿态 B · 下界/初始端



① 斜二测画法投影夹具台 · x′=x, y′=y/2, ∠x′O′y′=45°
② 原图边长 a=2.0, S=4.00
③ 直观图 S′≈1.41 (比值≈0.354)
④ 直观图面积 S′ · 量程[0, 12.5]
⑤ 面积比 S′/S · 量程[0, 0.5]

原图边长 a 2.0 · 坐标夹角 α 45°

姿态 C · 上界/满量程端



① 斜二测画法投影夹具台 · x′=x, y′=y/2, ∠x′O′y′=135°
② 原图边长 a=5.0, S=25.00
③ 直观图 S′≈8.84 (比值≈0.354)
④ 直观图面积 S′ · 量程[0, 12.5]
⑤ 面积比 S′/S · 量程[0, 0.5]

原图边长 a 5.0 · 坐标夹角 α 135°

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 在利用斜二测画法画水平放置的平面图形直观图时，下列几何性质一定保持不变的是：

☐ **A**两条相交直线的垂直关系

☐ **B**任意两条平行线段的平行关系与长度比值

☐ **C**图形中任意一个角的度数大小　☐ **D**任意一条倾斜线段的真实长度

2. 已知一个水平放置的矩形，在平面直角坐标系中的长为 6，宽为 4。用斜二测画法画出它的直观图，则该直观图的面积为：

☐ **A**6　☐ **B**12　☐ **C**$6\sqrt{2}$　☐ **D**$12\sqrt{2}$

3. 一个水平放置的三角形，其斜二测直观图是一个底边长为 4、高为 2 的三角形。则原三角形在原平面直角坐标系中的真实面积为：

☐ **A**$\sqrt{2}$　☐ **B**4　☐ **C**$8\sqrt{2}$　☐ **D**$16\sqrt{2}$

4. 在水平放置的平面图形斜二测直观图中，$\triangle O'A'B'$ 的边 $O'A'$ 在 x' 轴上，边 $O'B'$ 在 y' 轴上，且两边在直观图中的长度均量得为 2。下列推断正确的是：

☐ **A**原平面图形 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形

☐ **B**原平面图形 $\triangle OAB$ 中 $OA \perp OB$，且 $OA = 2$，$OB = 4$

☐ **C**直观图中 $O'A' = O'B'$，所以原图中两线段长度必定相等

☐ **D**直观图中 $\angle x'O'y' = 45^\circ$，所以原图形中两轴所成角也是 45°

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。斜二测画法的几何保真性质：

① **保持不变**：平行性（平行线段在直观图中仍然平行）；共线性；平行线段的长度比值保持不变。

② **发生改变**：垂直关系通常不再垂直（直角常画成 45° 或 135°）；角的大小普遍改变；不平行于坐标轴的倾斜线段长度不保持。

(2) [C]

C。原矩形面积 $S = 6 \times 4 = 24$。

根据斜二测画法面积变换公式：

$$S' = \frac{\sqrt{2}}{4} S = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 24 = 6\sqrt{2}$$

(3) [C]

C。直观图三角形的面积为：

$$S' = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

【逆向还原陷阱】：已知直观图面积求原图真实面积，必须使用逆向放大公式 $S = 2\sqrt{2}\, S'$，切忌误乘 $\frac{\sqrt{2}}{4}$！

$$S = 2\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}$$

直观图是压缩后的图形，还原到原图形面积必然更大（$8\sqrt{2} \approx 11.31 > 4$）。

(4) [B]

B。在原平面图形直角坐标系中，x 轴与 y 轴互相垂直，因此 $OA \perp OB$ 必定成立。

根据斜二测画法长度规则：

- 平行于 x 轴的线段长度保持不变，故 $OA = O'A' = 2$；
- 平行于 y 轴的线段在直观图中长度折半，还原到原图中长度必须扩大为 2 倍，故 $OB = 2 \times O'B' = 4$！

因此原图形是一个直角边分别为 2 和 4 的直角三角形（不是等腰！面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$）。

【红线警示】：绝对不能由直观图画成等长就认定原图等长，更不能由直观图的倾斜角臆断原图形的垂直关系！