7.2 复数的四则运算

FIG · B2-7-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

以下 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$；③ 中设 $z=c+di$。除法另要求除数非零。

① **加法与减法**：$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$；

② **乘法法则**：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$（$bd\cdot i^2=-bd$ 变号！）；

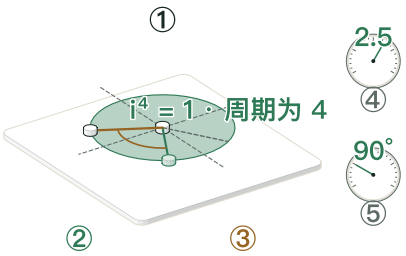
③ **共轭乘积**：$z\cdot\overline{z}=(c+di)(c-di)=c^2+d^2=|z|^2$（中间是**加号**，恒为非负实数！）；

④ **除法分母实数化**（$c+di\neq 0$，等价于 $c^2+d^2>0$）：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$；

⑤ **模的乘除性质与 i 周期性**：$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$（商式要求 $z_2\neq 0$）；$i^1=i,i^2=-1,i^3=-i,i^4=1$（周期为 4）。

02 · 动手实验台

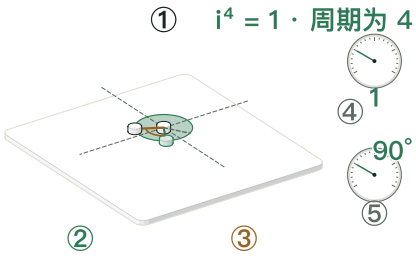
姿态 A · 基准状态



① 复平面乘 i 旋转陀螺台 · z·i^1 逆时针旋转 90°
② 初始 z≈2.17+1.25i (|z|=2.5)
③ 旋转后 z·i^1≈-1.25+2.17i
④ 模长守恒 |z·iᵏ| · 量程[0, 4]
⑤ 旋转角 k×90° · 量程[0°, 360°]

模长 |z| 2.5 · 初始角 θ 30° · 乘 ik k=1

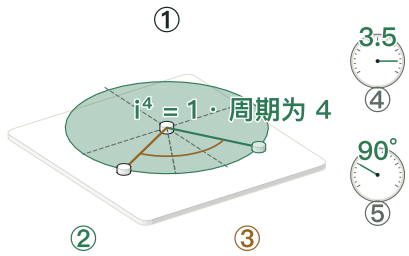
姿态 B · 下界/初始端



① 复平面乘 i 旋转陀螺台 · z·i^1 逆时针旋转 90°
② 初始 z≈0.87+0.50i (|z|=1)
③ 旋转后 z·i^1≈-0.50+0.87i
④ 模长守恒 |z·iᵏ| · 量程[0, 4]
⑤ 旋转角 k×90° · 量程[0°, 360°]

模长 |z| 1.0 · 初始角 θ 30° · 乘 ik k=1

姿态 C · 上界/满量程端



① 复平面乘 i 旋转陀螺台 · z·i^1 逆时针旋转 90°
② 初始 z≈3.03-1.75i (|z|=3.5)
③ 旋转后 z·i^1≈1.75+3.03i
④ 模长守恒 |z·iᵏ| · 量程[0, 4]
⑤ 旋转角 k×90° · 量程[0°, 360°]

模长 |z| 3.5 · 初始角 θ 330° · 乘 ik k=1

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 计算 $(2+i)(1-2i)$ 的结果是?

☐ A $4-3i$　☐ B $2-3i$　☐ C $4+3i$　☐ D $-3i$

2. 已知复数 $z=\dfrac{3+i}{1-i}$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}$ 是?

☐ A $1+2i$　☐ B $1-2i$　☐ C $2+i$　☐ D $-1-2i$

3. 计算 $(\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i)$ 的结果是?

☐ A 6　☐ B -6　☐ C $6i$　☐ D $-6i$

4. 计算 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2026}$ 的值是?

☐ A 0　☐ B i　☐ C $-1+i$　☐ D -1

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。展开得 $2-4i+i-2i^2=2-3i-2(-1)=4-3i$。

选 B 的同学漏算了 $-2i^2=+2$；选 C 的同学虚部符号搞反。

(2) [B]

B。先化简 z：分子分母同乘 $1+i$，得 $z=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3+3i+i+i^2}{1-(-1)}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$。

注意题目问的是**共轭复数** $\overline{z}$，虚部变号，得 $\overline{z}=1-2i$。选 A 的同学直接选了 z 而忘了求共轭！

(3) [B]

B。实数根式的乘法公式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 要求 $a,b\geq 0$；本题两个因子中的 i 不能丢掉。

两因子已写明是 $\sqrt{3}i$ 与 $2\sqrt{3}i$。相乘得 $(\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i)=6i^2=-6$。

若只算 $\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=6$ 而漏掉 $i^2=-1$，就会误得正六。这里不引入负数根式的主值约定。

(4) [C]

C。因为 $i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$，连续四项之和 $i+i^2+i^3+i^4=0$。以 4 为周期循环。

一共有 2026 项，$2026\div 4=506$ 余 2。因此前 $506\times 4=2024$ 项全部抵消为 0，只剩下最后两项：$i^{2025}+i^{2026}=i^1+i^2=i+(-1)=-1+i$。