6.4 平面向量的应用

FIG · B2-6-4

01 · 核心定理、公式与阶段边界

① **正弦定理**：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（边化角：$a=2R\sin A$；角化边：$\sin A=\dfrac{a}{2R}$）；

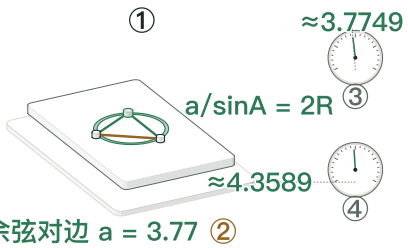
② **余弦定理**：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$（变形求角：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$）；

③ **面积公式**：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{abc}{4R}$；

④ **定理选择口诀**：已知对边对角找正弦，已知两边夹角找余弦；求角优先余弦定钝锐，求边比例正弦最顺手。

02 · 动手实验台

姿态 A · 基准状态

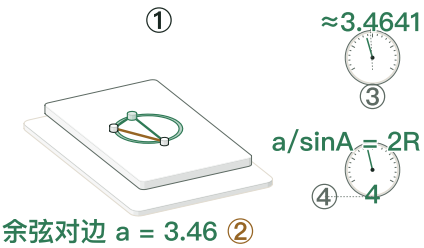


余弦对边 a = 3.77 ②

① 正余弦定理铰链与外接圆卡尺台 · b=3.5, c=4.0, A=60°
② 外接圆直径 2R = a/sinA = 4.36
③ 对边长度 a · 量程[0, 8]
④ 外接圆直径 2R · 量程[0, 9]

边长 b 3.5 · 边长 c 4.0 · 夹角 A 60°

姿态 B · 下界/初始端

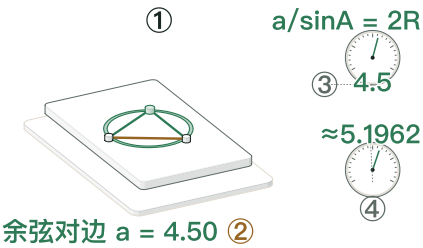


余弦对边 a = 3.46 ②

① 正余弦定理铰链与外接圆卡尺台 · b=2.0, c=4.0, A=60°
② 外接圆直径 2R = a/sinA = 4.00
③ 对边长度 a · 量程[0, 8]
④ 外接圆直径 2R · 量程[0, 9]

边长 b 2.0 · 边长 c 4.0 · 夹角 A 60°

姿态 C · 上界/满量程端



余弦对边 a = 4.50 ②

① 正余弦定理铰链与外接圆卡尺台 · b=4.5, c=4.5, A=60°
② 外接圆直径 2R = a/sinA = 5.20
③ 对边长度 a · 量程[0, 8]
④ 外接圆直径 2R · 量程[0, 9]

边长 b 4.5 · 边长 c 4.5 · 夹角 A 60°

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=5$，$C=60^\circ$，边 c 的长度是?

☐ A $\sqrt{19}$　☐ B 7　☐ C $\sqrt{34}$　☐ D 19

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$，边 $a=4$，则边 b 的长及外接圆直径 $2R$ 分别是?

☐ A $b=4\sqrt{2},\ 2R=8$　☐ B $b=2\sqrt{2},\ 2R=4$

☐ C $b=4\sqrt{2},\ 2R=4$　☐ D $b=2\sqrt{2},\ 2R=8$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，则角 A 的大小为?

☐ A 60°　☐ B 120°　☐ C 60° 或 120°　☐ D 无解

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知三边长分别为 $a=3, b=5, c=8$，求角 C 的度数。

☐ A 180°　☐ B 120°　☐ C 90°　☐ D 不能构成三角形

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。根据余弦定理：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \dfrac{1}{2} = 34 - 15 = 19$，开方得 $c = \sqrt{19}$。

选 B 的同学将减号算成了加号（$34 + 15 = 49 = 7^2$）；选 C 的同学当作直角三角形漏掉了余弦项；选 D 忘了开方。

(2) [A]

A。由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R$。外接圆直径 $2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{4}{\sin 30^\circ} = \dfrac{4}{1/2} = 8$；边 $b = 2R\sin B = 8\sin 45^\circ = 8 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$。

选 B 的同学把外接圆直径 $2R$ 误当成半径 R 来算。

(3) [C]

C。由正弦定理：$\sin A = \dfrac{a\sin B}{b} = \dfrac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

在 $(0^\circ, 180^\circ)$ 内，正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的角有两个：60° 与 120°。

必须用“大边对大角”检验：$a = \sqrt{3} > \sqrt{2} = b$，因此要求 $A > B = 45^\circ$。若 $A = 60^\circ$，$A + B = 105^\circ < 180^\circ$；若 $A = 120^\circ$，$A + B = 165^\circ < 180^\circ$。两解均合法！选 A 的同学掉入了“只取锐角”的典型陷阱。

(4) [D]

D。若盲目代入余弦定理：$\cos C = \dfrac{3^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 5} = \dfrac{34 - 64}{30} = -1$，容易误以为 $C = 180^\circ$（选 A）。

但是三角形任意内角都必须严格在 $(0^\circ, 180^\circ)$ 之间！更根本的前提是：**两边之和必须大于第三边**。而 $3 + 5 = 8 = c$，三点共线退化，根本围不成三角形。做解三角形题必须先检查三边能否构成三角形。