6.2 平面向量的运算

FIG · B2-6-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

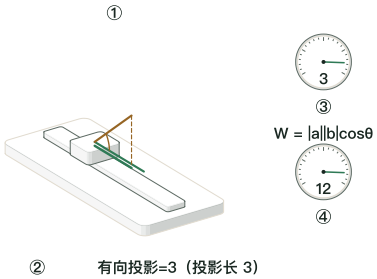
① **加法口诀**：首尾相连“首指向尾”（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$）或同起点对角线；
② **减法口诀**：同起点终点连线“指向被减向量”（$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$）；
③ **数量积核心公式**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$（$\theta\in[0,\pi]$；锐角正、垂直 0、钝角负）；
④ **模长与夹角**：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；非零垂直充要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线（平行）当且仅当存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。必须强调基准向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$。

① **投影向量**：$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$（是一个落在 $\boldsymbol{b}$ 所在直线上的**向量**）；
② **有向投影（投影值）**：$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}$（是一个**实数**：锐角为正，钝角为负，垂直为 0）；
③ **投影长度（投影模长）**：$\big||\boldsymbol{a}|\cos\theta\big|$（是几何线段模长，**必须非负**）。

02 · 动手实验台

姿态 A · 基准状态



① 滑轨拉车向量数量积测功台 · 锐角正功 (W > 0)
② 拉力 |a|=≈3.9051, 夹角 θ=39.8055710922652O4°
③ 有向投影 · 量程[≈-3.9051, ≈3.9051]
④ 数量积 a·b (功 W) · 量程[≈-15.62, ≈15.62]

标准参数

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 化简 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ 的结果是?
☐ A 0　☐ B $\boldsymbol{0}$　☐ C $2\overrightarrow{AB}$　☐ D $\overrightarrow{AC}$

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$?
☐ A 6　☐ B $6\sqrt{3}$　☐ C 12　☐ D 3

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则下列结论必定成立的是?
☐ A $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　☐ B $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　☐ C $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$　☐ D $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面向量。命题甲：“存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$”；命题乙：“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”。则甲是乙的什么条件?
☐ A充要条件　☐ B充分不必要条件　☐ C必要不充分条件
☐ D既不充分也不必要条件

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。由三角形加法法则，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，再加上 $\overrightarrow{CA}$，首尾相接绕回起点 A，位移为零向量 $\mathbf{0}$。

注意：向量运算的结果依然是向量，必须写成零向量 $\mathbf{0}$，而不能写成实数 0！选 A 的同学混淆了向量与标量。

(2) [A]

A。直接代入数量积定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=3\times 4\times\dfrac{1}{2}=6$。

选 B 的同学错用了正弦 $\sin 60^\circ$（把数量积当成了三角形面积公式）；选 C 的同学漏乘了余弦值 $\cos 60^\circ$。

(3) [B]

B。将等式移项：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\implies\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$。

由数量积为 0 的充要条件，说明 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$（或者 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ 即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$）。

边界提醒：向量数量积**没有消去律**，绝不能像实数乘法一样两边除以 $\boldsymbol{a}$ 得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$！只要 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 就可以完全不相等。选 A 是把向量当成了实数。

(4) [B]

B。充分性：若存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则两向量必定共线平行，甲能推出乙。

必要性：若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 时（零向量与任何向量平行），不存在任何实数 λ 能满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$！因此乙推不出甲。

边界提醒：向量共线定理充要成立的红线是**基准向量非零（$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$）**。忽略零向量就会误选 A。