10.1 随机事件与概率

FIG · B2-10-1

01 · 核心定理、公式与阶段边界

古典概型公式：$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}$

互斥加法定理：$A\cap B=\varnothing \implies P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

对立求逆定理：$P(\overline{A})=1-P(A)$　（“至少/至多”正难则反）

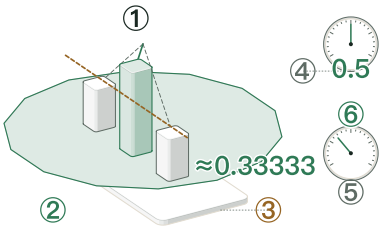
对立一定互斥；互斥不一定对立。对立比互斥多一个条件：两件事合起来是整个样本空间。

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 含的样本点个数}}{\Omega\text{ 的样本点个数}}$$

只有互斥时才能直接相加；不确定互斥，就用 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

02 · 动手实验台

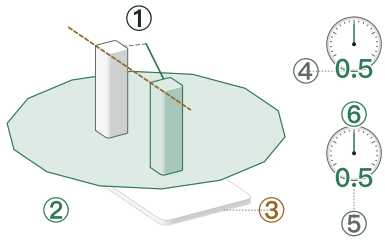
姿态 A · 基准状态



① 等距二元分流抽样机 · Ω 共 2^2 = 4 条等可能路径
② k=1 正面：C(2,1)=2 条路径
③ P=2/4=0.500 vs 均分 1/3=0.333
④ 真实概率 C(n,k)/2ⁿ · 量程[0, 1]
⑤ 等分误算 1/(n+1) · 量程[0, 1]
⑥ 合成类别必重查等可能

硬币枚数 n 2 · 正面枚数 k 1

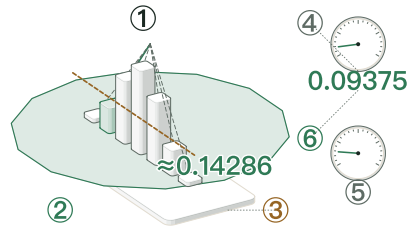
姿态 B · 下界/初始端



① 等距二元分流抽样机 · Ω 共 2^1 = 2 条等可能路径
② k=1 正面：C(1,1)=1 条路径
③ P=1/2=0.500 vs 均分 1/2=0.500
④ 真实概率 C(n,k)/2ⁿ · 量程[0, 1]
⑤ 等分误算 1/(n+1) · 量程[0, 1]
⑥ 合成类别必重查等可能

硬币枚数 n 1 · 正面枚数 k 1

姿态 C · 上界/满量程端



① 等距二元分流抽样机 · Ω 共 2^6 = 64 条等可能路径
② k=1 正面：C(6,1)=6 条路径
③ P=6/64=0.094 vs 均分 1/7=0.143
④ 真实概率 C(n,k)/2ⁿ · 量程[0, 1]
⑤ 等分误算 1/(n+1) · 量程[0, 1]
⑥ 合成类别必重查等可能

硬币枚数 n 6 · 正面枚数 k 1

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 袋子里有 3 个红球、2 个白球，除颜色外都一样。随手摸出 1 个，是红球的概率是?

☐ A $\frac{3}{5}$　☐ B $\frac{1}{2}$　☐ C $\frac{2}{3}$

2. 掷红、蓝两颗骰子，点数和不小于 10 的概率是?

☐ A $\frac{1}{6}$　☐ B $\frac{1}{9}$　☐ C $\frac{1}{4}$

3. 先后抛两枚均匀硬币，“一正一反”的概率是?

☐ A $\frac{1}{3}$　☐ B $\frac{1}{2}$　☐ C $\frac{1}{4}$

4. 掷一颗骰子，A“点数是 3 的倍数”，B“点数是偶数”。$P(A\cup B)=$?

☐ A $\frac{5}{6}$　☐ B $\frac{2}{3}$　☐ C $\frac{1}{2}$

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。给 5 个球编号，摸到每个球机会一样，Ω 有 5 个样本点，红球占 3 个，$P=\frac{3}{5}$。选 B 是把“红、白”两种颜色当成了等可能；选 C 是拿红球数比白球数。

(2) [A]

A。和为 10：$(4,6),(5,5),(6,4)$；和为 11：$(5,6),(6,5)$；和为 12：$(6,6)$。共 6 个，$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。选 B 的同学把 $(4,6)$、$(6,4)$ 这样的当成一个，只数了 4 个。可以在“动手”① 点“和 ≥ 10”核对。

(3) [B]

B。样本点是正正、正反、反正、反反，等可能；“一正一反”含正反、反正两个，$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。选 A 的同学把结果合成了“两正、一正一反、两反”三类，又当成等可能——合成类别后没有重查等可能（“动手”② 取 $n=2$ 可以看到中间那根柱子是两边的两倍）。

(4) [B]

B。$A=\{3,6\}$，$B=\{2,4,6\}$，有公共的 6，不互斥。$P(A\cup B)=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$；直接数 $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ 也是 4 个。选 A 是直接相加，把 6 算了两次。