5.4 三角函数的图象与性质

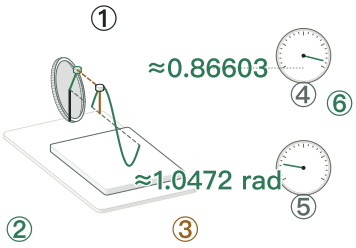
FIG · B1-5-4

01 · 核心定理、公式与阶段边界

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
最小正周期	2π	2π	π
奇偶性	奇函数 (原点对称)	偶函数 (y轴对称)	奇函数 (原点对称)
单调递增区间	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$	$[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$
对称轴	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	无对称轴
对称中心	$(k\pi, 0)$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0)$	$(\frac{k\pi}{2}, 0)$

02 · 动手实验台

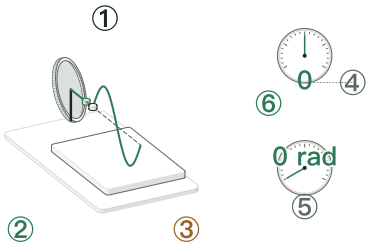
姿态 A · 基准状态



① 单位圆飞轮与简谐卷纸相位投影仪 · y = sin θ (T = 2π)
② 飞轮转角 θ=60° (0.33π rad)
③ 瞬时投影值 sin(60°) = 0.866
④ 瞬时值 sin(θ) · 量程[-1, 1]
⑤ 相位角 θ · 量程[0, 2π]
⑥ 最值 ±1 处为对称轴

飞轮转角 θ 60° · 函数 (0=sin, 1=cos) sin

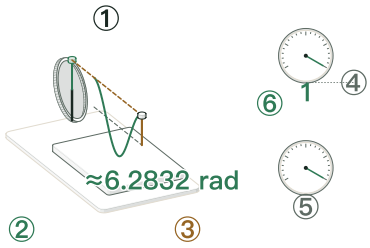
姿态 B · 下界/初始端



① 单位圆飞轮与简谐卷纸相位投影仪 · y = sin θ (T = 2π)
② 飞轮转角 θ=0° (0.00π rad)
③ 瞬时投影值 sin(0°) = 0.000
④ 瞬时值 sin(θ) · 量程[-1, 1]
⑤ 相位角 θ · 量程[0, 2π]
⑥ 最值 ±1 处为对称轴

飞轮转角 θ 0° · 函数 (0=sin, 1=cos) sin

姿态 C · 上界/满量程端



① 单位圆飞轮与简谐卷纸相位投影仪 · y = cos θ (T = 2π)
② 飞轮转角 θ=360° (2.00π rad)
③ 瞬时投影值 cos(360°) = 1.000
④ 瞬时值 cos(θ) · 量程[-1, 1]
⑤ 相位角 θ · 量程[0, 2π]
⑥ 最值 ±1 处为对称轴

飞轮转角 θ 360° · 函数 (0=sin, 1=cos) cos

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. $y=\sin x$ **在下面哪个区间上递减?**

☐ A$[0,\pi]$ ☐ B$[\frac{\pi}{2},\pi]$ ☐ C$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ☐ D$[\pi,2\pi]$

2. $y=\cos x$ **在** $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ **上的值域是?**

☐ A$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ☐ B$[-\frac{1}{2},1]$ ☐ C$[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ☐ D$[-1,1]$

3. $y=\tan x$ **的图象每一段都是从左下往右上走的。那么"**$y=\tan x$ **在它的定义域上是增函数"对吗?**

☐ A对，每一段都在上升

☐ B不对，只能说它在每一段 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi)$ 上递增

☐ C不对，它是减函数

4. 常数函数 $f(x)=3$（$x\in\mathbf{R}$）**是周期函数吗?**

☐ A不是，它的图象没有起伏 ☐ B是，最小正周期是 1

☐ C是，但没有最小正周期

参考答案与防坑要点：

(1) [B]

B。减区间是 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 在 $k=0$ 那段里。A 前半段在上升；C 是增区间；D 过了 $\frac{3\pi}{2}$ 又开始上升。

(2) [C]

C。区间在 $[0,\pi]$ 里，余弦递减，最大在左端 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小在右端 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$。选 A 的同学把 $\cos\frac{2\pi}{3}$ 算成了正的；B 以为区间里有最高点 $x=0$，其实没有。

(3) [B]

B。取 $x_1=\frac{\pi}{4}$、$x_2=\frac{3\pi}{4}$：$x_1<x_2$，可是 $\tan x_1=1$，$\tan x_2=-1$，后面的反而小。增函数要求“任取 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$”，这里不成立。

选 A 的同学看到了每段都上升，却忘了两段之间隔着一条渐近线：过了 $x=\frac{\pi}{2}$，函数值从 $+\infty$ 那边“跳”回 $-\infty$ 那边重新开始。单调区间只能一段一段写。

(4) [C]

C。任取一个正数 T，对每个 x 都有 $f(x+T)=3=f(x)$，所以任何正数都是它的周期，它当然是周期函数。

可是正数里没有最小的：1 是周期，$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{100}$ 也都是。所以“周期函数一定有最小正周期”是错的。