4.4 对数函数

FIG · B1-4-4

01 · 核心定理、公式与阶段边界

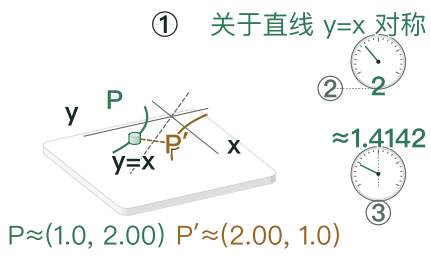
对数不等式双铁律：真数大于 0，底数定不等号方向。
比较 $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ 时：
当 $a > 1$，等价于 $f(x) > g(x) > 0$；
当 $0 < a < 1$，等价于 $0 < f(x) < g(x)$。

指对反函数：$y = \log_a x$ 与 $y = a^x$ 的图象关于 $y = x$ 对称。
坐标对调：$(s, t) \leftrightarrow (t, s)$。

定点 $(1, 0)$ 与定义域生命线：
$\log_a 1 = 0, \quad x \in (0, +\infty)$

02 · 动手实验台

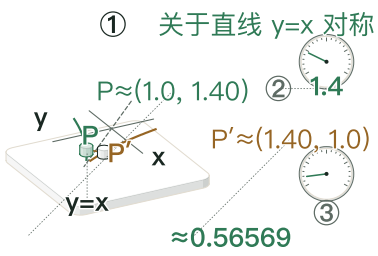
姿态 A · 基准状态



① 指数与对数互为反函数 · 底数 a=2.0
② 函数值 $y_0=a^{x_0}$ · 量程[0, 6]
③ 镜像弦长 |PP′| · 量程[0, 6]

底数 a 2.0 · 采样点 x0 1.0

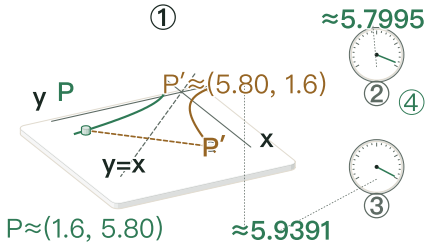
姿态 B · 下界/初始端



① 指数与对数互为反函数 · 底数 a=1.4
② 函数值 $y_0=a^{x_0}$ · 量程[0, 6]
③ 镜像弦长 |PP′| · 量程[0, 6]

底数 a 1.4 · 采样点 x0 1.0

姿态 C · 上界/满量程端



① 指数与对数互为反函数 · 底数 a=3.0
② 函数值 $y_0=a^{x_0}$ · 量程[0, 6]
③ 镜像弦长 |PP′| · 量程[0, 6]
④ 关于直线 y=x 对称

底数 a 3.0 · 采样点 x0 1.6

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. 函数 $y = \log_{0.5}(x + 2)$ 的定义域和单调性是?

☐ A定义域 $(-2, +\infty)$，在上面递减
☐ B定义域 $(-2, +\infty)$，在上面递增
☐ C定义域 $(2, +\infty)$，在上面递减 ☐ D定义域 $\mathbf{R}$，递减

2. $a = \log_3 0.5$，$b = \log_3 2$，$c = \log_2 3$。大小关系是?

☐ A$a < b < c$ ☐ B$b < a < c$ ☐ C$a < c < b$ ☐ D$c < b < a$

3. $y = \log_2(x^2)$ 和 $y = 2\log_2 x$ 是同一个函数吗?

☐ A是，$\log_2(x^2) = 2\log_2 x$ 是运算法则 ☐ B不是，定义域不同
☐ C不是，定义域相同但对应关系不同

4. 比较 $\log_2 5$ 和 $\log_3 5$ 的大小。

☐ A$\log_2 5 > \log_3 5$ ☐ B$\log_2 5 < \log_3 5$，底数大，值就大
☐ C相等，真数都是 5

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。真数 $x+2>0$，得 $x>-2$。底数 $0.5<1$；x 变大时真数 $x+2$ 变大，对数值变小，所以递减。选 C 是解 $x+2>0$ 时符号弄反了；选 D 是忘了真数要大于 0。

(2) [A]

A。用中间量 0 和 1：$a=\log_3 0.5<\log_3 1=0$；$0=\log_3 1<b=\log_3 2<\log_3 3=1$；$c=\log_2 3>\log_2 2=1$。所以 $a<0<b<1<c$。

(3) [B]

B。“真数”这一条：$\log_2(x^2)$ 只要 $x^2>0$，即 $x\neq 0$；$2\log_2 x$ 要 $x>0$。定义域一个是 $\{x\mid x\neq 0\}$，一个是 $(0,+\infty)$，不是同一个函数。

比如 $x=-2$：$\log_2 4=2$ 有意义，$2\log_2(-2)$ 没意义。法则 $\log_a M^r=r\log_a M$ 要求 $M>0$；x 可能是负数时，只能写成 $\log_2(x^2)=2\log_2|x|$。

(4) [A]

A。“同底才能用单调性”这一条：单调性说的是**同一个底**下 x 变大时 y 怎么变，这里底数变了，函数都换了。

找中间量 2：$\log_2 5>\log_2 4=2$，$\log_3 5<\log_3 9=2$。所以 $\log_2 5>2>\log_3 5$。

在“动手”的图里也看得出：$x>1$ 时底数越大，图象越贴近 x 轴，同一个 $x=5$ 处的值越小。