3.2 函数的基本性质

FIG · B1-3-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

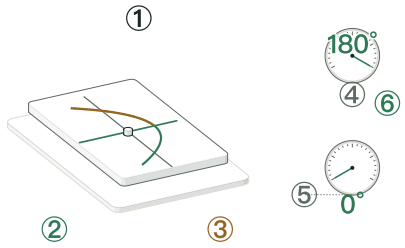
单调性：先指定定义域内的区间 D。任取 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$：若总有 $f(x_1) < f(x_2)$，就在 D 上递增；若总有 $f(x_1) > f(x_2)$，就在 D 上递减。

最值：对讨论范围内的所有 x，都有 $f(x) \le M$，且存在输入使 $f(x) = M$，M 才是最大值。把不等号改为 $f(x) \ge m$，且确有输入取到 m，就得到最小值。

奇偶性：定义域须关于原点对称。对其中每个 x，若 $f(-x) = f(x)$，则为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，则为奇函数。零函数可既奇又偶；奇函数且 0 在定义域内才有 $f(0) = 0$，反过来不成立。

02 · 动手实验台

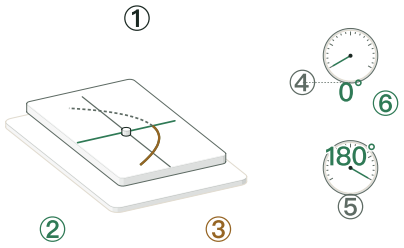
姿态 A · 基准状态



① 偶函数 y 轴对称三维折叠镜台 · f(-x) = f(x)
② 右支 f(2)=0.20 ↔ 左支 f(-2)=0.20
③ 当前翻折角 θ=180° (100% 重合!)
④ 轴翻折角 θ · 量程[0°, 180°]
⑤ 重合余角 180-θ · 量程[0°, 180°]
⑥ 定义域必关于0对称

翻折/旋转角 θ 180° · 模式 (0=偶函数翻折, 1=奇函数旋转) 偶函数

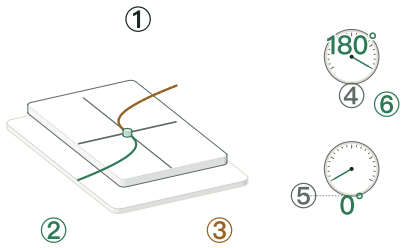
姿态 B · 下界/初始端



① 偶函数 y 轴对称三维折叠镜台 · f(-x) = f(x)
② 右支 f(2)=0.20 ↔ 左支 f(-2)=0.20
③ 当前翻折角 θ=0° (未到位)
④ 轴翻折角 θ · 量程[0°, 180°]
⑤ 重合余角 180-θ · 量程[0°, 180°]
⑥ 定义域必关于0对称

翻折/旋转角 θ 0° · 模式 (0=偶函数翻折, 1=奇函数旋转) 偶函数

姿态 C · 上界/满量程端



① 奇函数 180° 中心旋转台 · f(-x) = -f(x)
② 右支 f(2)=2.00 ↔ 左支 f(-2)=-2.00
③ 当前旋转角 θ=180° (100% 重合!)
④ 中心旋转角 θ · 量程[0°, 180°]
⑤ 重合余角 180-θ · 量程[0°, 180°]
⑥ 定义域必关于0对称

翻折/旋转角 θ 180° · 模式 (0=偶函数翻折, 1=奇函数旋转) 奇函数

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. $f(x) = -x^2 + 4x$，$x \in [0, 3]$。**最大值和最小值是?**

☐ **A**最大值 4，最小值 0　☐ **B**最大值 3，最小值 0
☐ **C**最大值 4，最小值 3

2. $f(x)$ **是定义在** $\mathbf{R}$ **上的奇函数，** $x > 0$ **时** $f(x) = x^2 + 1$。$f(-2) + f(0) =$**?**

☐ **A** -5　☐ **B** -4　☐ **C** 5　☐ **D** -3

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$。**下面哪个说法对?**

☐ **A** $f(x)$ 是它定义域上的减函数
☐ **B** $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递增，在 $(0, +\infty)$ 上递减
☐ **C** $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上分别递减，但不是定义域上的减函数

4. $f(x) = x^2$，$x \in [-1, 2)$。**它的最大值和最小值是?**

☐ **A**最大值 4，最小值 0　☐ **B**最大值 1，最小值 0
☐ **C**没有最大值，最小值 0　☐ **D**最大值 1，没有最小值

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。配方 $f(x)=-(x-2)^2+4$，在 $[0,2]$ 上递增、$[2,3]$ 上递减。最大值在拐弯处 $f(2)=4$；最小值比两端：$f(0)=0$，$f(3)=3$，取 0。选 B 是只比了两端，漏了顶点；选 C 是两端只看了右端。

(2) [A]

A。$f(-2)=-f(2)=-(4+1)=-5$；奇函数在 0 有定义，$f(0)=0$。选 B 是把 0 代进了 $x>0$ 的式子，得 $f(0)=1$，可那个式子不管 $x=0$；选 D 是只给 x^2 加了负号，$-4+1$。

(3) [C]

C。（边界：分别单调不保证合并后仍单调。）每一支内部，x 变大 $\frac{1}{x}$ 变小；可跨过 0：$-1<1$，$f(-1)=-1<f(1)=1$，反而变大。一对反例就推翻了“减函数”。

所以递减区间写“$(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$”，本例不在两段的并集上递减。选 A 只看了每一支自己内部。

(4) [C]

C。（边界：开端点可能取不到。）最小值：$x=0$ 在区间里，$f(0)=0$，而且 $x^2\geq 0$，两条都满足。

最大值：x 越靠近 2，x^2 越接近 4，可 2 不在区间里，4 取不到（A 错）；1 又压不住，$f(1.5)=2.25>1$（B 错）。比 4 小的数都会被超过，所以**没有**最大值。