2.2 基本不等式

FIG · B1-2-2

01 · 核心定理、公式与阶段边界

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

左边是几何平均（积的开方）；右边是算术平均（和的一半）。

$$\Longleftrightarrow$$

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}$$

两正数之和，不小于积开方的 2 倍。

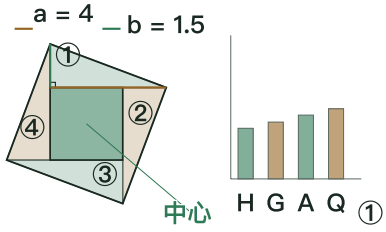
（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立）

使用条件：两数均为正，且题目允许它们相等时，才有下面的最值结论。**口诀总结**：**积一定**（$ab=P$），**和有最小值** $2\sqrt{P}$；**和一定**（$a+b=S$），**积有最大值** $\left(\frac{S}{2}\right)^2$。两者都须检验 $a=b$ 能否满足全部限制；取不到时，上面的式子只给出界。

02 · 动手实验台

姿态 A · 基准状态

赵爽弦图：面积相加　　均值大小

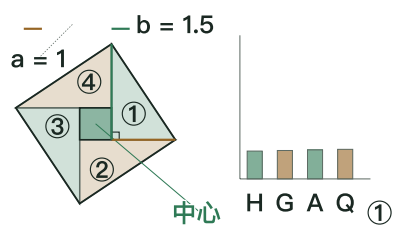


① 同一底线、同一尺度

正数 a 4.0 · 正数 b 1.5

姿态 B · 下界/初始端

赵爽弦图：面积相加　　均值大小

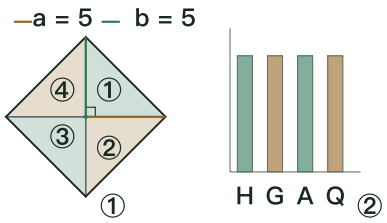


① 同一底线、同一尺度

正数 a 1.0 · 正数 b 1.5

姿态 C · 上界/满量程端

赵爽弦图：面积相加　　均值大小



① a = b：中心面积为 0
② 同一底线、同一尺度

正数 a 5.0 · 正数 b 5.0

03 · 诊断与易错辨析自测（先独立作答，再核对答案页）

1. $x>0$，$2x+\frac{8}{x}$ **的最小值是?**

☐ A 8　☐ B 4　☐ C 10　☐ D 16

2. $x>0$，$y>0$，$2x+y=4$，xy **的最大值是?**

☐ A 1　☐ B 2　☐ C 4　☐ D 8

3. x **是不等于** 0 **的实数。** $x+\frac{1}{x}$ **的最小值是?**

☐ A 2，因为 $x+\frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$　☐ B -2　☐ C 没有最小值

4. $x \ge 3$，$x+\frac{4}{x}$ **的最小值是?**

☐ A 4　☐ B $\frac{13}{3}$　☐ C 没有最小值

参考答案与防坑要点：

(1) [A]

A。两个正数 $2x$ 和 $\frac{8}{x}$，积 $2x\cdot\frac{8}{x}=16$ 是定值，所以和 $\geq 2\sqrt{16}=8$。等号要 $2x=\frac{8}{x}$，$x=2$，能取到。选 B 的同学只算了 $\sqrt{16}$；选 C 是代了 $x=1$，那只是一个值，不是最小的。

(2) [B]

B。和是定值的是 $2x$ 与 y（不是 x 与 y），先凑出来：$xy=\frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot y\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 4=2$。等号要 $2x=y$，配上 $2x+y=4$ 得 $x=1$，$y=2$。选 C 的同学把 x、y 当成和为 4 了。

(3) [C]

C。"正"这一条不满足：题目没说 $x>0$。取 $x=-1$，值是 -2；取 $x=-10$，值是 -10.1；x 往负的方向走，值要多小有多小。

A 只在 $x>0$ 时对。B 的 -2 是 $x<0$ 时的**最大值**，不是最小值。

(4) [B]

B。"等"这一条不满足：$x+\frac{4}{x}\geq 4$ 没错，但等号要 $x=2$，不在 $x\geq 3$ 里，4 只是下界。在"动手"②里把 k 调成 4、m 调成 3：这一段一直往上走，最低点在端点 $x=3$，值是 $3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$。代数验证不需要等到后面章节：当 $x\geq 3$ 时，

$$x+\frac{4}{x}-\frac{13}{3}=\frac{(x-3)(3x-4)}{3x}\geq 0.$$

分母为正，分子两因式非负，且等号当且仅当 $x=3$，所以这就是最小值。

回顾与迁移：改条件后，基本不等式仍成立，失效的是"下界能够取到"这一步。下次遇到范围限制，先检验等号；必要时回到计划，用图找候选、用代数证明，别照搬上一题的最小值。